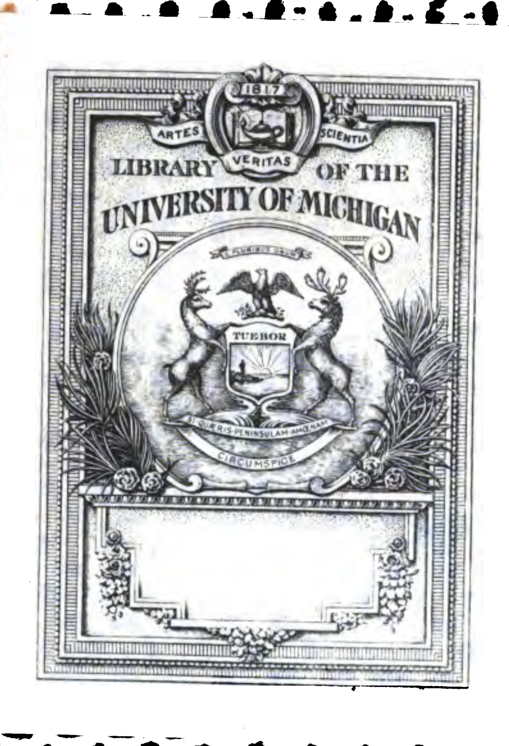

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

G. F. Tremosa

GÉOMÉTRIE MÉTAPHYSIQUE,

OU

ESSAI D'ANALYSE

SUR

LES ÉLÉMENS DE L'ÉTENDUE BORNÉE.

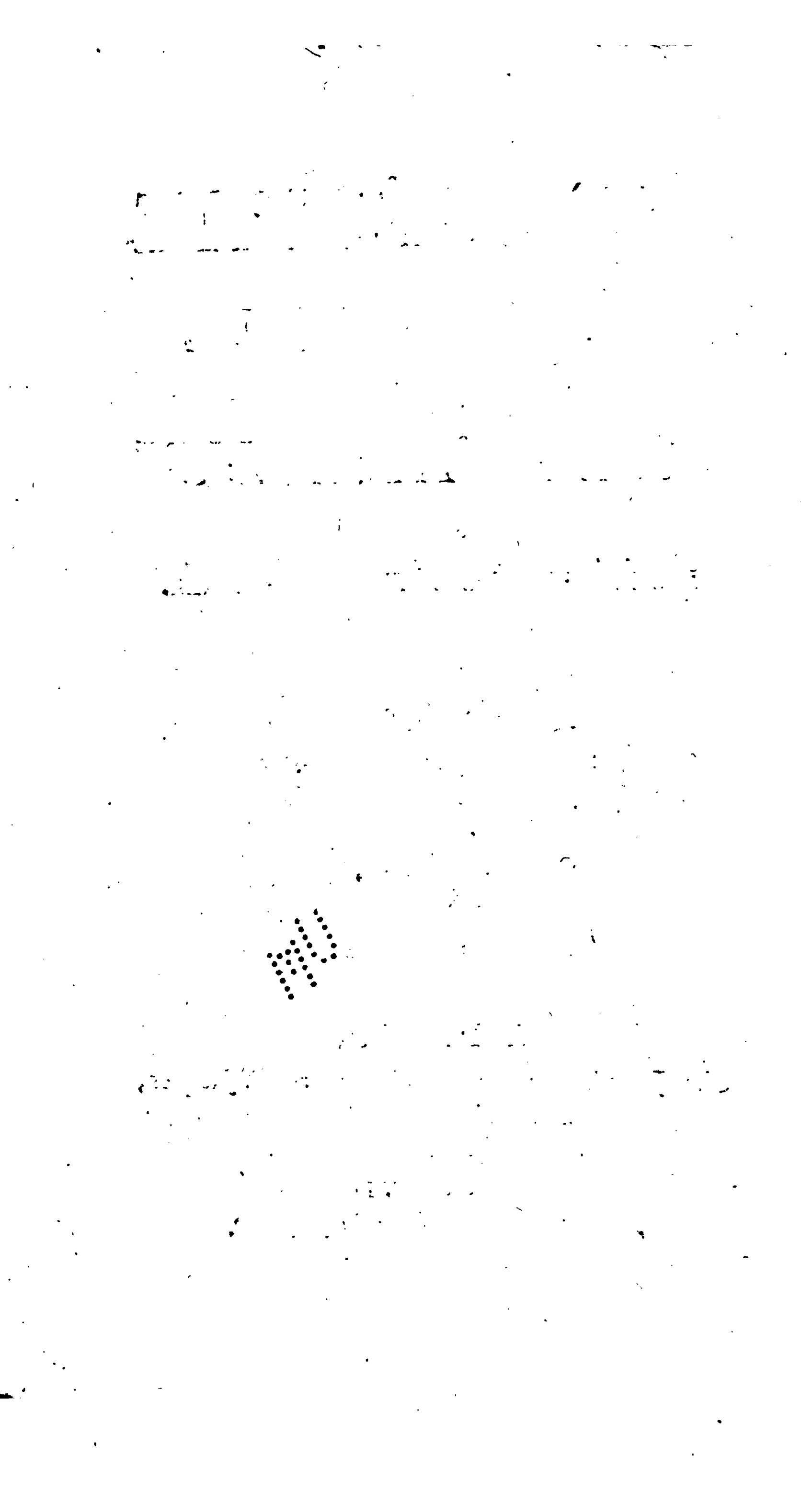


A PARIS,

Chez JEAN-THOMAS HERISSANT, rue S. Jacques, à S. Paul & à S. Hilaire.

M. DCC. LVIII.

Avec Approbation & Privilége du Roi.





PRÉFACE.

LE titre de cet Ouvrage ne doit point effrayer les Lecteurs. La Métaphysique que j'annonce n'est point une Métaphysique abstruse & rebutante. Loin de semer de nouvelles épines dans la carriere de la Géométrie, j'ai dessein d'en faciliter l'entrée; & des amis peut-être trop indulgens me flattent de quelque succès.

Les premiers Géométres ne parvinrent à connoître les propriétés de l'étendue bornée qu'à force de recherches pénibles. Quel plaisir pour eux, lorsqu'après des tentatives souvent infructueuses, ils trouverent enfin des démonstrations! On admire avec raison leurs découvertes, & plus encore la sagacité qui les y conduisit par des routes qu'ils se frayerent eux-mêmes. Chose étonnante! La Géométrie étoit déja dans un âge mûr, lorsque la

Philosophie n'étoit guères qu'au berceau. Mais contens de la certitude, les Géométres n'osoient encore aspirer à l'évidence. Ce n'est pas en effet aux créateurs des Sciences & des Arts qu'on demande la perfection. L'ordre & l'élégance sont à la charge de leurs successeurs.

La Géométrie presque oubliée dans les siécles d'ignorance, fut remise en honneur à la renaissance des Lettres. On étudia les Anciens, & l'on ne pouvoit rien faire de mieux. Euclide devint le Livre classique que les Sçavans éclaircissoient par de vastes commentaires, & dans lequel une prévention outrée ne leur permettoit pas de soupçonner des défauts : il y en avoit cependant, au moins dans la méthode. „ Au lieu de commencer, dit „ M. Nicole, par les choses les plus simples „ & les plus générales, pour passer „ aux plus composées & aux plus particulieres, comme l'ordre le demande, „ Euclide brouille tout ; traitant pêle-mêle „ des Lignes & des Surfaces, des Triangles „ & des Quarrés, & prouvant par des „ Figures les propriétés des simples Lignes. " On regardoit sans doute ce désordre comme un mal nécessaire auquel

L'art de penser, IV. P. Ch. IX.

il étoit dangereux de toucher. On craignoit qu'en changeant la suite des propositions, il ne fût plus si facile de les déduire les unes des autres ; & qu'en rangeant les matieres dans un ordre plus naturel, on ne nuisît à la démonstration. Eh, qu'importe, disoit-on peut-être, la maniere de proposer les vérités, pourvû que l'on parvienne à convaincre ?

M. Arnauld osa le premier secouer le joug d'un préjugé si contraire au progrès des Sciences. Ce grand homme imagina sans peine un plan supérieur à celui qu'on avoit suivi jusqu'alors. En se jouant, & sans autre secours qu'une légére teinture de Géométrie, il composa de nouveaux Elémens, source & modéle de tous ceux qu'on a publiés depuis.

Ces espéces de copies se sont multipliées à l'infini ; & ce torrent ne paroît pas devoir tarir sitôt. Ne seroit-ce point une preuve qu'aucun de ces Ouvrages ne remplit parfaitement l'idée que nous nous formons d'une excellente Géométrie élémentaire ? Sont-ils même tout-à-fait exemts des défauts que l'Auteur de l'Art de penser a si bien relevés dans celui d'Euclide, & dans ses Commentateurs ?

Si les grands génies, qui depuis un siécle ont élevé la Géométrie transcendante au point de gloire où nous la voyons, eussent daigné s'abaisser aux Elémens de la simple Géométrie, il est à présumer qu'un Ouvrage sorti de leur plume auroit approché de la perfection. Mais ils n'ont pû se résoudre à descendre de leurs sublimes spéculations. Ils ont remis à des mains plus foibles le soin de former des Commençans.

Ce n'est pas que je veuille décrier nos Livres élémentaires. Tous sont utiles, & plus ou moins estimables. Néanmoins en les parcourant, on s'apperçoit qu'ils ont été jettés, pour ainsi dire, dans le même moule. C'est à peu près le même ordre, le même enchaînement de vérités, le même genre de démonstrations : un peu plus ou un peu moins d'étendue & de détail, plus ou moins d'applications à la pratique en font la différence. Nos Auteurs ne pouvoient-ils se faire valoir plus avantageusement que par cette abondance stérile? La Géométrie est une Science profonde : on peut l'envisager sous tant de faces : on peut tellement varier les preuves des vérités qu'elle pro-

posé, que chaque Livre élémentaire devroit presque offrir un systême tout neuf.

Un célébre Géométre de nos jours (a) s'est écarté avec succès du chemin battu. Abandonnant la méthode synthétique à laquelle ses prédécesseurs s'étoient servilement attachés, il remonte jusqu'à l'origine de la Géométrie. Guidé par le besoin des hommes, il procéde avec les inventeurs de cette science; & sans donner dans les écarts qui leur étoient inévitables, il suit l'ordre qu'ils auroient dû se prescrire. Pourquoi ne tenterions-nous pas à son exemple d'ouvrir une nouvelle route? Ce n'est pas l'esprit de rivalité qui m'anime: je ne me flatte point de faire mieux que les autres; mais j'ose faire autrement.

Deux voies conduisent à la vérité: celle de la simple certitude, & celle de l'évidence. „ Les Géométres, dit l'Auteur „ de l'Art de penser, sont louables de n'a- „ voir rien voulu avancer que de con- „ vainquant. Mais il semble qu'ils n'ont „ pas pris assez garde, que pour avoir une „ science parfaite de quelque vérité, il ne „ suffit pas de sçavoir que cela est vrai, si

IV. Part. Ch. IX.

(a) M. Clairaut.

„ de plus on ne pénetre par des raisons „ prises de la nature de la chose même, „ pourquoi cela est vrai. Car jusqu'à ce „ que nous soyons arrivés à ce point-là, „ notre esprit n'est point pleinement sa- „ tisfait, & cherche encore une plus gran- „ de connoissance que celle qu'il a; ce „ qui est une marque qu'il n'a point en- „ core la vraie science.

Ainsi, selon ce judicieux Auteur, Euclide & ses disciples étoient répréhensibles de n'avoir élevé les vérités Géométriques qu'au dégré de la simple certitude, & de n'avoir fait aucun effort pour leur donner l'éclat de l'évidence.

Mais n'auroit-on pas quelque droit de faire le même reproche aux Auteurs des nouveaux Elémens? Quoiqu'ils aient disposé leur matiere dans un ordre plus naturel que celui d'Euclide, il est manifeste qu'à son exemple ils ne tendent guères qu'à la conviction. De-là, tant de preuves compliquées, forcées, épineuses, qui désesperent les Commençans; & cela, pour établir des propositions dont la vérité saute aux yeux. On rejette même avec mépris, comme des preuves vagues, ces étincelles de lumiere que la simple cons-

truction des Figures fait quelquefois briller, pour leur substituer ce qu'on appelle des démonstrations rigoureuses fondées sur un échaffaudage de Lignes subsidiaires que le caprice semble avoir imaginées.

Je m'en rapporte à ceux qui lisent nos Livres élémentaires. Ils sont convaincus sans doute, lorsqu'ils sont venus à bout de comprendre leur Auteur. Mais combien de fois leur arrive-t'il de perdre terre ? Quelle est souvent leur surprise, lorsqu'après avoir parcouru le labyrinthe obscur par lequel on les conduit, ils se voyent arrivés au but d'où ils se croyoient encore fort éloignés ? Il leur semble que le hazard seul a fait appercevoir dans une Figure des propriétés qu'on n'y auroit jamais soupçonnées ; & que c'est par un nouveau coup de hazard, qu'une proposition prouvée sert à démontrer la proposition suivante. Cet assemblage de propositions leur paroît un tas de vérités isolées dont la multitude les étonne & les accable, parcequ'on leur laisse ignorer l'intime rapport qui les unit & les identifie. Une marque certaine que ces preuves rigoureuses ne sont rien moins que naturelles,

c'est qu'apprises avec peine, elles s'oublient aisément, à moins qu'on ne se les rappelle sans cesse. Ainsi, malgré leurs travaux, nos Auteurs n'ont point encore porté la Géométrie au point d'une Science parfaite, qui satisfasse pleinement l'esprit, & l'assure de la possession de la vérité.

On convient aujourd'hui que toutes les Sciences, sans en excepter la Grammaire, sont fondées sur des principes très-métaphysiques; & qu'en vain se flatteroit-on d'en avoir une véritable connoissance, si l'on ne remontoit jusqu'aux premieres notions. La Géométrie ne sera pas sans doute exceptée de la régle générale. Cette Science faisant abstraction des qualités physiques qui nous rendent les corps sensibles, peut-elle être autre chose qu'une métaphysique de l'Etendue bornée? Rien en effet dont nous ayons des idées si nettes & si distinctes que de ces portions d'Etendue que nous appellons Figures. Seroit-il possible que ces notions approfondies ne nous découvrissent aucune propriété dans les sujets qu'elles nous font si bien concevoir?

Cependant les Géométres sont peu

curieux de remonter à ces idées primordiales. Après quelques axiômes & quelques définitions, ils entrent tout d'un coup en matiere, traitent du Point & des Lignes droites & courbes; de-là passent aux Surfaces, & finissent par les Solides. Je n'ai garde de blâmer cette marche. Mais il seroit essentiel d'y préparer le Lecteur. Il faudroit lui faire sentir que le Solide, seule Figure complette, est trop composé, pour être connu d'une premiere vûe; que par conséquent il est nécessaire de l'examiner en détail: que la Surface qui l'environne mérite nos premiers regards: que cette Surface elle-même étant terminée par des Lignes ou droites ou courbes, nous devons examiner d'abord les situations où ces Lignes peuvent être placées les unes à l'égard des autres; comment elles peuvent se rencontrer, se toucher, se couper, & ce qui résulte de ces différens rapports. En un mot, il faudroit apprendre au Lecteur que nous instruisons, qu'une Figure solide est un tout, & ne sçauroit par conséquent être connue, à moins qu'on ne la décompose en ses Elémens formateurs: il faudroit lui faire observer qu'une portion d'étendue est un

amas de Surfaces ou de Tranches; la Surface, un amas de Lignes; la Ligne, un amas de Points. On lui diroit encore que le Point par son mouvement forme la Ligne; la Ligne, la Surface; & la Surface, le Solide. Le plus foible Commençant peut saisir ces notions, & dès-lors comprendre l'objet de l'étude à laquelle il se livre, & la raison de la longue route qu'il lui faut parcourir avant que d'arriver au Solide tout formé.

Mais le Géométre peut-il faire usage du Point, de la Ligne & de la Surface, sans en examiner la nature, sans distinguer les différens états dans lesquels on peut les considérer? Ce seroit vouloir connoître un tout, sans en connoître les parties. Et qu'on ne dise point que cette matiere est du ressort de la Géométrie transcendante. On ne me persuadera jamais que l'analyse des Elémens des Figures soit étrangere à la Géométrie élémentaire, ni qu'on ne puisse pénétrer dans leur nature, sans recourir aux calculs de Leibnitz & de Newton.

Cette partie fondamentale ayant été si négligée jusqu'ici, je ne serois pas surpris d'avoir à reprocher des écarts à quel-

ques-uns de nos Auteurs modernes. Qu'on ne s'effraye pas néanmoins : il eſt difficile que des Géométres tombent dans de véritables erreurs. Tout ſe réduira de ma part à relever des embrouillemens, des équivoques & de légéres mépriſes.

On conviendra ſans doute que la méthode ſuivie juſqu'ici a des inconvéniens. Mais qu'y faire, dira-t'on ? La Métaphyſique nous montre d'abord une foible lueur, & nous abandonne tout à coup. Ne ſommes-nous pas trop heureux de ſortir de ces ténébres, en nous frayant un ſentier obſcur, qui ne laiſſe pas de nous conduire à la lumiere ? A quoi ſerviroit-il d'employer en quelques occaſions rares des preuves plus ſimples & plus naturelles ? La marche de nos démonſtrations doit être uniforme, & cette bigarure ne pourroit que la troubler.

Un Ecrivain plus hardi répondroit : On n'a qu'à lire mon Ouvrage, & l'on verra ſi l'influence de la Métaphyſique ſur la Géométrie eſt auſſi bornée qu'on ſe l'imagine. Mais à Dieu ne plaiſe que je préſume ainſi de moi-même. Ce n'eſt qu'un foible *Eſſai* que je préſente à mes Maîtres. Cependant, tout informe qu'il

reuſes m'ont déja fait arriver, pourquoi refuſerois-je le ſecours d'une main favorable qui ne peut qu'affermir mes pas?

Que l'on commence donc, ſi l'on veut, par ſe convaincre : que l'on s'exerce à l'école de quelques-uns de nos Auteurs élémentaires les plus eſtimés ; on ne perdra pas ſon tems. Mais peut-être qu'après avoir acquis avec eux une certitude laborieuſe, on ne ſera pas fâché de gouter avec moi les douceurs de l'évidence. Ce ne ſera pas même toujours par de nouvelles preuves que j'eſſayerai d'y conduire. J'adopte avec plaiſir celles que m'offrent tous les Auteurs, lorſque je puis y donner une tournure métaphyſique. Par elles-mêmes, elles ſont lumineuſes : pourquoi prendroit-on à tâche de les obſcurcir?

Ce n'eſt pas au reſte que je néglige la certitude. J'oſe me flatter qu'il ne manque rien à mes preuves pour être des démonſtrations en rigueur. Je tiens compte à la Métaphyſique des ſecours qu'elle m'offre pour me mettre ſur la voie de la vérité ; & lorſqu'elle ne m'y fixe pas irrévocablement, je l'abandonne ſans ſcrupule pour prendre un chemin plus ſûr.

On

On en verra plus d'un exemple dans cet Ouvrage.

Que l'on me pardonne encore si je releve un autre défaut de nos Auteurs élémentaires. C'est leur dévouement servile à la méthode synthétique. Ils la trouvent plus commode apparemment. Car rien n'est plus aisé que d'exposer un Théorême, & d'y joindre un raisonnement décharné, que l'on intitule *Démonstration*. Voilà néanmoins une des principales causes du dégoût que les Commençans éprouvent dans l'étude de la Géométrie. Chaque nouvelle Proposition les surprend, parceque rien de ce qui précéde ne les y prépare. Ce sont des oracles dont ils ont peine à découvrir le sens. La distance qu'ils voyent entr'eux & leur maître les humilie & les décourage à l'excès. N'est-il pas plus raisonnable de se proportionner à leur foiblesse? de leur proposer la vérité, non comme trouvée, mais comme à trouver, & de faire avec eux le chemin nécessaire pour les y conduire? Il leur semble alors qu'ils ont marché tout seuls; & la confiance qu'ils en conçoivent, les met en état d'avancer à grands pas dans la carriere.

Il eſt vrai que la méthode analytique (*a*) occaſionne inévitablement quelques longueurs. Comme il faut rendre compte de tous les procédés, & tenir perpétuellement ſon Lecteur en haleine, il eſt difficile, & peut-être dangereux d'être concis. Mais qu'importe ? La clarté naît quelquefois d'une prolixité bien entendue. Il ne ſuffit pas, pour inſtruire, d'établir des vérités. Il eſt encore plus important de les développer, d'en faire ſentir le prix, & d'étendre les idées de ceux qui commencent. C'eſt par-là qu'ils acquerreront l'eſprit géométrique, avantage le plus ſolide que l'on puiſſe retirer de l'étude de la Géométrie.

J'ajoute que c'eſt le ſeul moyen d'y répandre quelque agrément. A l'exemple des Scholaſtiques, les Géométres ont abjuré toutes les graces du diſcours, comme ſi par elles-mêmes elles nuiſoient à la recherche de la vérité. C'eſt une injuſte prévention fomentée par la pareſſe. „ Ceux-„ là honorent bien la nature, dit M.

Penſ. C. XXXI. n.° 42.

(*a*) Il ne s'agit point ici de l'Analyſe mathématique ſi connue par les Ouvrages des grands Géométres de nos jours, mais de l'Analyſe philoſophique que je voudrois introduire dans les Leçons élémentaires.

„ Paſchal, qui lui apprennent qu'elle peut „ parler de tout, & même de Théologie.“ Pourquoi le langage de la Géométrie lui ſeroit-il étranger ? Seroit-ce la ſeule Science que l'on ne pourroit traiter d'une maniere intéreſſante ? Je ne dis pas qu'on l'égaye par des épiſodes & des digreſſions : encore moins qu'on y répande des fleurs ou de grands traits d'éloquence. Mais eſt-il beſoin de la morceler & de la hacher, pour ainſi dire, en Lemmes, en Théorêmes, en Problêmes détachés ? Ne peut-on pas diſſerter ſur cette matiere, comme les Auteurs polis traitent une queſtion de Théologie ou de Métaphyſique ? Je ſens plus qu'un autre combien la néceſſité de déſigner les Points, les Lignes & les Surfaces par les lettres de l'Alphabet, glace l'imagination d'un Auteur. Mais ſorti de ces entraves, il doit généraliſer les objets, raiſonner avec ſes Lecteurs. Pour peu qu'il ait de talent, il trouvera le moyen de jetter quelque intérêt dans ſon ſtyle.

L'application de la Théorie à la Pratique paroît être l'objet principal de nos Elémens modernes. C'eſt en effet par-là

que la Géométrie est vraiment utile à la société. Je ne pourrai néanmoins m'étendre sur ce sujet, parceque je considére la Géométrie comme une Science, & non comme un Art. Mais comme l'art est fondé sur la science, quiconque se sera rendu les principes familiers, en fera l'application sans peine.

Par la même raison on ne trouvera dans ce Volume ni Traité d'Arithmétique ni Traité d'Algébre. Ces Traités, très-utiles d'ailleurs, n'entrent pas dans mon plan. Je dois supposer que mes Lecteurs auront au moins une légére notion des quatre principales régles de l'Arithmétique : je ne leur en demande pas davantage. A l'égard de l'Algébre, on sçait que la Géométrie élémentaire n'a pas besoin de son secours, & que par conséquent on fait très-bien de s'en passer. Je me suis donc absolument interdit tout calcul algébrique, lors même qu'il a fallu établir la Théorie générale des Raisons & des Proportions. Je n'en ai retenu que quelques signes pour abréger l'expression, éviter la répétition des mêmes mots, & mettre plus nettement sous les yeux du

Lecteur les formules numériques que je donne pour exemple. (*a*)

Il est inutile d'entrer dans un plus grand détail. C'est à ceux qui se donneront la peine de lire mon Ouvrage, qu'il appartient de le juger. Je me croirai très-heureux si ce foible *Essai* peut faciliter l'étude de la Géométrie; & plus heureux encore, s'il pouvoit inspirer à quelque habile homme le dessein de perfectionner mon projet, & de l'étendre, le plus qu'il sera possible, aux autres parties des Mathématiques.

(*a*) Les principaux Signes algébriques sont au nombre de cinq. + signifie *plus*, & marque l'*Addition*. — signifie *moins*, & désigne la *Soustraction*. × entre deux nombres exprime que le premier est multiplié par le second : Ex. 3×4. — entre deux nombres, l'un au-dessus & l'autre au-dessous, exprime la *Division* du supérieur par l'inférieur : Ex. $\frac{2}{3}$. Enfin = entre deux *Sommes*, en marque l'*égalité*.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit qui a pour titre, *La Géométrie Métaphysique, &c.* Quoique l'Auteur s'y écarte quelquefois du langage ordinaire des Géométres, il m'a paru que la méthode élégante & claire, suivie dans cet Ouvrage, en rendroit l'impression très-utile aux progrès des Mathématiques. Fait à Paris le 3 Mars 1758.

Signé, BOUGUER.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers, qu'il appartiendra : Salut. Notre amé l'Abbé Foucher, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa Composition qui a pour titre : *Géométrie Métaphysique*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer sondit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera ; & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait

ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts: à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformement à la feuille imprimée, attachée pour modéle ſous le contre-ſcel des Préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1725. Qu'avant de l'expoſer en vente, le Manuſcrit qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE LAMOIGNON; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur DE LAMOIGNON, le tout à peine de nullité des Préſentes: du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Expoſant & ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenue pour dûement ſignifiée; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou

Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission; & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Versailles, le quatorziéme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cent cinquante-huit, & de notre Regne le quarante-troisiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Je soussigné reconnois avoir cédé à M. Jean-Th. HERISSANT, Libraire à Paris, mon droit au présent Privilége, suivant les conventions faites entre nous. A Paris, ce 17 Mai 1758.

Signé, FOUCHER.

Registré ensemble la Cession qui est au bas du présent Privilége, sur le Registre XIV. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 355. fol. 317. conformement aux anciens Réglemens confirmés par celui du 28. Février 1723. A Paris, le 19. Mai 1758.

Signé, P. G. LE MERCIER, *Syndic.*

TABLE

TABLE DES MATIERES.

LIVRE I.

LIVRE II.

LES FIGURES PLANES. p. 75

LIVRE III.

LES SOLIDES. p. 338

Fin de la Table des Matieres.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 2. Ligne 19. font. *Lisez* sont.
P. 21. L. 25. elle le frappe. *L.* elle la frappe.
P. 29. L. 4. qui ne tend uniquement que vers la Ligne AB. *L.* qui tend uniquement à la Ligne AB.
P. 42. L. 6. de côté. *L.* de Côtés.
P. 98. L. 25. B & C. *L.* B & D.
P. 114. *à la marge*, L. 10. Fig. 41. *effacez cette indication, & substituez-y les* Fig. 37, 38, 39 & 40. *indiquées plus bas.*
P. 169. L. 18. *Tnagente. L. Tangente.*
P. 173. L. 16. *de l'expliquer. L. d'expliquer.*
P. 191. L. dern. se levera. *L.* s'élévera.
P. 224. L. 14. éloïgnées. *L.* éloignée.
P. 293. L. 14. *des totales. L. des Figures totales.*
P. 297. L. 10. par le Triangle le plus simple. *L.* par le Triangle, le plus simple.
P. 323. L. 25. par par un détour. *L.* par un détour.
P. 334. L. 30. égale. *L.* égal.
P. 401. L. 6. de Hauteur. *L.* de sa Hauteur.

GEOMETRIE



GÉOMÉTRIE MÉTAPHYSIQUE,

OU

ESSAI D'ANALYSE

SUR

LES ELEMENS DE L'ETENDUE BORNÉE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.



UOIQUE la Géométrie doive sa naissance au besoin que nous avons de connoître la mesure des Corps, elle ne se borne pas néanmoins aux objets qui frappent nos sens. Sans s'arrêter aux qualités physiques qui les différentient, elle n'y considere que l'Etendue qui leur est commune à tous. Les corps existans ne sont même de son ressort, qu'autant qu'ils sont intelligibles : c'est dans la

A

région des possibles qu'elle prétend faire des découvertes; & c'est de cette région sublime qu'elle descend, pour appliquer aux Etres étendus qui composent notre monde, les régles immuables qui conviendroient également à tout autre monde que celui que nous habitons.

Mais la Géométrie en s'élevant jusqu'à l'idée la plus spirituelle de l'Etendue, ne se livre pas à des spéculations métaphysiques touchant sa nature. Elle n'examine point si toute Etendue est Corps; ou si l'espace & la matiere n'en seroient pas deux espéces différentes: elle n'en considere point l'immensité, la pénétrabilité, ou l'impénétrabilité. Laissant ces grandes questions à l'écart, elle n'envisage que les portions d'étendue bornées de toutes parts, & séparées par leur contour de toutes celles qui les environnent ou qui pourroient les environner. Ces portions isolées sont l'unique objet de la Géométrie: *Elle en découvre la nature, les propriétés, les rapports; & donne des régles sûres pour les mesurer & les construire exactement.*

Définition de la Géométrie.

Toutes les portions d'étendue se ressemblent parfaitement quant à la substance. Car l'Etendue comme étendue étant absolument homogène, les parties étendues ne peuvent différer substantiellement entr'elles que par le plus ou par le moins. Mais leur forme extérieure, le contour qui les termine pouvant varier à l'infini, met entr'elles une diversité infinie. Une boule & une colonne de cire sont de même substance: on peut supposer même qu'il y a autant de cire dans l'une que dans l'autre. Si donc ces deux

portions de cire différent entr'elles, comme on n'en peut douter, ce n'est que par leur forme extérieure. C'est donc uniquement de cette forme que les portions d'étendue tirent leur dénomination : c'est par rapport à cette forme qu'on les partage en classes, en genres, en espéces. Enfin c'est de-là que leur vient le nom général de *Figures*, adopté par les Géométres pour éviter les circonlocutions.

Formons-nous donc une idée nette de ces Etendues bornées; & pour les saisir plus fortement, ne dédaignons pas d'appeller l'imagination à notre secours. Dans l'immensité de l'Etendue exposée aux yeux de notre esprit, taillons des figures à notre gré; & voyons jusqu'où la raison peut aller pour nous en développer la nature.

Toute Figure doit être considérée selon ses *Dimensions* & selon ses *Elémens*. Ce sont deux points de vûe qu'il ne faut pas confondre, & qu'on ne distingue pas toujours avec assez de soin.

Dimensions des Figures.

Ce qu'on apperçoit d'abord dans une Figure, ce sont les Dimensions. Toute portion d'étendue en a nécessairement trois, & ne peut en avoir davantage; c'est-à-dire, qu'elle ne peut être mesurée que sous les trois rapports de *Longueur*, de *Largeur* & de *Profondeur*. Il faut donc avoir égard à ces trois rapports, si l'on veut connoître parfaitement la grandeur d'une Figure quelconque.

Cette idée se présente naturellement à ceux mêmes qui ne sont pas Géométres : ou, pour

mieux dire, c'eſt dans cette idée que conſiſte la Géométrie naturelle que le Créateur a gravée dans tous les eſprits. Que l'on propoſe au manœuvre le plus ignorant de conduire un foſſé autour d'une piéce de terre, ou de conſtruire un maſſif de maçonnerie, il ne ſe contentera pas d'examiner la Longueur de l'ouvrage qu'il entreprend : il demandera quelle Largeur & quelle Profondeur on exige de lui; & c'eſt en combinant de ſon mieux toutes les trois, qu'il évaluera ſon travail.

Les trois Dimenſions ſont inſéparables, c'eſt-à-dire, que la Longueur ne peut ſe trouver nulle part, que la Largeur & la Profondeur ne s'y trouvent auſſi. Car ces trois rapports étant eſſentiellement renfermés dans l'idée de l'Etendue, rien ne peut être étendu, qu'il ne le ſoit en longueur, Largeur & Profondeur.

Mais quoiqu'inſéparables, les Dimenſions ont chacune leur idée diſtincte, qui ne permet pas de les confondre. De la Longueur d'un corps, on ne peut rien conclure ni pour ſa Largeur, ni pour ſa Profondeur. Si j'examine la diſtance de deux endroits, je m'occupe uniquement de la Longueur de la route. Que la chauſſée ſoit plus ou moins large, la Longueur du chemin ne ſera ni plus ni moins grande. Mais lorſque je conſidere combien la chauſſée peut contenir d'hommes ou de voitures de front, je ne fais attention qu'à ſa Largeur, ſur laquelle la Longueur de la route n'influe en aucune façon.

Si je veux connoître l'étendue d'un terrein, je ne regarde que la ſuperficie qu'il offre à mes

yeux, & je n'y vois qu'une combinaison de Longueur & de Largeur. Mais je fais attention à la Profondeur, lorsqu'il m'importe de connoître ce que la surface extérieure dérobe à ma vûe.

Ce n'est pas au hazard que dans l'énumération des Dimensions de l'Etendue, on met la Longueur au premier rang, la Largeur au second, & la Profondeur au troisiéme. Car on ne peut concevoir la Largeur, sans penser à quelque Longueur au moins indéterminée; & l'on ne peut concevoir la Profondeur, sans penser à quelque Longueur & à quelque Largeur réunies ensemble : au lieu que l'idée de Longueur ne suppose point celle de Largeur; ni l'idée de Largeur, celle de Profondeur. On suit donc l'ordre naturel en considérant les figures, d'abord selon leur Longueur; ensuite selon leur Longueur & leur Largeur : enfin selon les trois Dimensions réunies.

Il est important de remarquer que les Dimensions ne sont pas des parties substantielles de l'Etendue; mais seulement des attributs métaphysiques, ou plutôt trois rapports sous lesquels on conçoit que toute portion d'étendue peut être mesurée. Mais comme il est nécessaire que l'imagination donne du corps à ces précisions idéales, on se représente aisément les Dimensions par le moyen des Elémens de l'Etendue, c'est-à-dire, par le moyen des parties intégrantes dont elle est formée.

Ces Elémens sont au nombre de trois, ainsi que les Dimensions, sçavoir, le *Point*, la *Ligne* & la *Surface*; & c'est par le concours de ces trois

Elémens des Figures.

choſes que ſe forme le *Solide ;* c'eſt-à-dire, la Figure complette.

Pour s'en convaincre, il ſuffit de faire attention, que toute Figure ou portion d'étendue eſt terminée par des *Surfaces :* toute Surface, par des *Lignes :* toute Ligne, par des *Points*. Mais ce n'eſt pas tout. En quelque endroit que je coupe le *Solide*, je trouve des *Surfaces :* en quelque endroit que je coupe la Surface, je trouve des *Lignes :* Enfin en quelque endroit que je coupe la Ligne, je trouve des *Points*. Je dois donc regarder le Solide, comme un composé de *Surfaces :* la Surface, comme un composé de *Lignes ;* & la Ligne, comme un composé de *Points*.

Préſentons le même objet ſous un autre point de vûe ; & pour rendre la choſe plus ſenſible, arrêtons les yeux ſur un Solide tel que le *Cube*.
Fig. 1. Je choiſis cette figure, parcequ'étant fort ſimple, elle peut aiſément ſe réduire dans ſes Principes. Les commençans, que le nom de la Figure effrayeroit encore, n'ont qu'à ſe repréſenter un dez à jouer.

Je vois que ce Solide eſt terminé par ſix faces égales. Prenons une d'entr'elles ; la ſupérieure, par exemple ; je vois cette Surface terminée par quatre Lignes égales, qui par leur union forment quatre pointes également éloignées les unes des autres. De même prenant encore une de ces Lignes, par exemple, la Ligne AB, je la vois terminée par deux Points A & B, dont l'un eſt le commencement, & l'autre la fin de la Ligne.

Suppoſons maintenant que le Cube diſparoiſſe, & qu'il ne m'en reſte que le Point A. A l'aide

de ce premier Elément, je vais reconſtruire le Cube en entier.

Prenant le Point A, je le fais mouvoir directement vers B. Voilà la Ligne AB tracée; & le Point A dans ſon trajet a marqué tous les Points dont la Ligne AB eſt composée.

Prenant enſuite cette Ligne AB, & la conduiſant de côté par un mouvement également répandu dans tous ſes Points, enſorte que le Point A trace la Ligne AC égale à AB, j'aurai la Surface quarrée ABC; & la Ligne AB dans ſon trajet a marqué toutes les Lignes dont la Surface ABC eſt composée.

Enfin prenant cette Surface, & la conduiſant hors de ſon plan par un mouvement uniforme, enſorte que le Point A décrive la Ligne AD égale à AB & à AC, voilà le Cube achevé; & la Surface ABC a marqué dans ſa route toutes les Surfaces qui forment ſa ſolidité.

Pour conſtruire ce Cube, je n'employe, comme on voit, que des Points, des Lignes & des Surfaces, qui par conſéquent en ſont les véritables & les ſeuls Elémens.

Je ne m'étendrai pas davantage ſur ce ſujet, pour ne pas m'enfoncer dans une Métaphyſique trop abſtruſe ſur la nature des Elémens. Une diſcuſſion plus approfondie pourroit effaroucher ceux qui ne ſont pas encore initiés dans les myſtères de la Géométrie. Ce que j'en dis ici eſt ſuffiſant pour ouvrir l'entrée à des recherches importantes. Les commençans rompus à ce premier travail, ſeront plus en état dans la ſuite de s'élever à une Théorie plus ſublime. Je me con-

tente d'ajouter quelques observations qui me paroissent essentielles.

PREMIERE OBSERVATION.

Il ne faut pas confondre les Dimensions avec les Elémens de l'Etendue.

C'est une conclusion que tout lecteur attentif aura tirée de lui-même. Car les Dimensions ne sont que des qualités métaphysiques de l'Etendue : au lieu que les Points, les Lignes & les Surfaces en sont des parties réelles, qui coopérent à sa formation.

D'ailleurs si les Elémens étoient la même chose que les Dimensions, il faudroit dire que le Point est la Longueur ; la Ligne, la Largeur ; & la Surface, la Profondeur ; ce qui seroit de la derniere absurdité.

SECONDE OBSERVATION.

Quoique les Elémens ne soient pas les Dimensions, il y a néanmoins beaucoup de connexion entre ces deux choses ; parceque les Elémens sont le signe naturel des Dimensions.

Par exemple, lorsqu'on pense à la Longueur seule, il n'y a personne qui ne se la représente comme une Ligne sans Largeur, qui seroit tirée directement d'un Point à un autre. La Ligne est donc l'expression naturelle de la Longueur ; & ces deux choses s'incorporent tellement ensemble, que la Ligne réveille toujours l'idée de Longueur, & que nous ne concevons celle-ci que sous la forme du signe qui la réalise à notre imagination.

Cette Ligne a un commencement, une fin, un milieu: il n'y a point d'endroits où elle ne puiſſe être coupée; & tous ces termes s'appellent *Points*. Le Point exprimera donc le commencement, la fin, le milieu de la Longueur; & celle-ci réaliſée en Ligne, pourra être coupée, diviſée, diminuée, augmentée par le moyen des Points.

Lorſque l'on réunit dans ſa penſée la Longueur & la Largeur, cette réunion ſe préſente à l'eſprit ſous la forme d'une Surface, c'eſt-à-dire, comme une portion d'étendue dont on n'apperçoit point la Profondeur.

Enfin, l'on conçoit la réunion des trois Dimenſions, en conſidérant que la Surface, qui frappe nos yeux ou notre imagination, eſt néceſſairement ſuivie de quelque portion d'étendue plus ou moins conſidérable, ſur laquelle elle eſt comme appuyée. C'eſt ce qui forme un *Solide*, ou Figure complette.

Quoique la Ligne ſoit le ſigne naturel de la premiere Dimenſion, on s'en ſert néanmoins auſſi pour exprimer les deux autres.

Par exemple, dans le Cube que nous avons déja conſidéré, ſi l'on prend une Ligne latérale AB, cette premiere Ligne ſera meſure de la Longueur du Solide.

Si dans le plan de cette Surface, on prend une autre Ligne telle que AC, qui frappe directement la premiere AB, cette ſeconde Ligne exprimera la Largeur.

Enfin, ſi d'un Point de cette Surface, on éleve directement une Ligne telle que AD,

cette troisiéme Ligne exprimera la Profondeur de la Figure.

Mais il est évident que dans ces deux derniers cas, la Ligne de Largeur suppose celle de Longueur ; & la Ligne de Profondeur, celles de Longueur & de Largeur : au lieu que la Ligne de Longueur ne suppose rien. Ainsi, la Ligne par elle-même, isolée de toute autre considération, est toujours signe de Longueur.

On voit par-là que le Point, la Ligne & la Surface ont un rapport intime aux Dimensions de l'Etendue. Mais, je le répéte, les Elémens ne sont point les Dimensions ; & ce seroit tout bouleverser, que de confondre ce qui exprime avec ce qui est exprimé, ce qui représente avec ce qui est représenté.

TROISIE'ME OBSERVATION.

Il suit des deux premieres observations, que *le Point, la Ligne & la Surface ont des qualités différentes selon qu'on les considére, comme signes des Dimensions, ou comme parties intégrantes de l'Etendue ; & qu'on auroit tort de leur attribuer toujours ce qui ne leur convient que dans l'un de ces états.*

Je ne pourrois développer & prouver cette conséquence sans entrer dans des discussions qui passent la portée de ceux qui n'ont encore aucune teinture de Géométrie. J'y reviendrai lorsqu'il en sera tems. Ce que j'ai dit jusqu'ici suffit néanmoins, pour faire sentir la justesse de la conclusion, au moins d'une maniere générale, & pour obliger de se tenir sur ses gardes, afin

de ne pas confondre ces deux vûes si différentes. Car il est certain que la Géométrie considere le Point, la Ligne & la Surface, tantôt comme signes des Dimensions, & tantôt comme Elémens de l'Etendue.

Division de l'Ouvrage.

Entrons maintenant en matiere. Notre but est de connoître la nature & les propriétés des Figures complettes, c'est-à-dire, de toutes les portions possibles d'Etendue, isolées & bornées de toutes parts.

Pour y parvenir, il faut décomposer ces Figures, & les réduire à leurs Elémens. Car toute Figure est un Tout; & un Tout ne peut être connu que par le moyen des parties dont il est composé.

Un Solide est un composé de Surfaces, & de plus environné de Surfaces, qui méritent une singuliere attention. Car ce sont elles qui caractérisent la Figure, & qui différentient deux Substances, qui d'ailleurs pourroient être parfaitement homogènes. Nous sommes même plus frappés de la superficie des Corps, que nous voyons, que de leur Solidité que nos sens ne pénétrent pas. Il est encore vrai que la connoissance des Superficies influe du moins autant dans les besoins & dans les agrémens de la vie, que la connoissance de la Solidité des Corps. Aussi les Surfaces sont l'objet des recherches les plus fines de la Géométrie. Et quoiqu'elles soient incomplettes par le défaut d'une Dimension, elles forment néanmoins une espéce de Tout, que l'on décore du nom de *Figure plane* par opposition aux Figures solides. On voit sans

peine qu'il eſt néceſſaire de connoître parfaitement ces Figures incomplettes, avant que de conſidérer la réunion des trois Dimenſions dans un Solide.

Mais ces Figures planes ſont bornées par des Lignes; & d'ailleurs on les conçoit formées par les Lignes collatérales, dont l'arrangement peut varier à l'infini. Il eſt donc néceſſaire avant que de conſidérer les Figures planes toutes formées, de connoître la nature des Lignes, leurs différentes eſpéces, leurs ſituations diverſes les unes à l'égard des autres, & toutes les manieres dont elles peuvent ſe rencontrer, ſe toucher, ſe couper.

Les Lignes ſont à leur tour composées de Points. Mais ce premier Elément eſt trop uniforme pour mériter un article ſpécial. On dira tout ce qu'il eſt néceſſaire d'en ſçavoir, en traitant des Lignes, des Surfaces & des Solides.

Ainſi ce Traité de Géométrie ſe diviſe naturellement en trois Livres. Les *Lignes* ſeront l'objet du premier: les *Surfaces* ou *Figures planes*, du ſecond; & les *Figures ſolides*, du troiſiéme.



GÉOMÉTRIE MÉTAPHYSIQUE.

LIVRE PREMIER.

LES LIGNES.

IMAGINONS une Superficie plane, telle qu'eſt ſenſiblement une belle glace, ſi parfaitement unie, qu'aucun Point ne s'éleve au-deſſus, ni ne s'abbaiſſe au-deſſous des autres, & dont l'étendue ſoit indéfinie. C'eſt ſur ce Plan que nous allons décrire toutes les Lignes & toutes les Surfaces que nous devons conſidérer.

Je vois d'abord que je n'y puis tracer que deux ſortes de Lignes, ſçavoir des *Lignes droites* & des *Lignes courbes*: & l'idée que j'ai de ces deux eſpéces de Lignes eſt ſi nette & ſi claire, que les définitions qu'on voudroit en donner, ne pourroient que l'obſcurcir. Il ne ſera cependant pas inutile de développer ce qu'enferment ces idées de *Rectitude* & de *Courbure*. Fig. 2.

Je conçois par une *Ligne droite*, une multitude de Points rangés ſans intervalle dans la même *Direction*, ſans qu'aucun d'eux s'en écarte même inſenſiblement: & par une *Ligne courbe*, une multitude de Points qui, rangés de même ſans Fig. 3.

intervalle, changent continuellement de *Direction.*

Prenons le Point A premier Elément de la Ligne. Ce Point, s'il est seul, ne détermine aucune Ligne. Il peut se mouvoir dans tous les sens; & par conséquent être le Principe d'une infinité de Lignes tant droites que courbes. Mais à ce Point, si j'en joins un second, c'est une Direction qui commence, distinguée de toutes les autres que je pouvois choisir. Si j'ajoute un troisiéme Point dans la même Direction, voilà la Ligne droite toute formée; & pour la prolonger à volonté, il ne faut qu'ajouter des Points dans la Direction commencée.

Fig. 3. La Ligne courbe a nécessairement la même origine. Le Point A son premier Elément ne détermine rien : il faut un second Point pour commencer la Ligne; & ce second Point forme une Direction, laquelle étant suivie donneroit une Ligne droite. Mais si le troisiéme Point n'est pas placé dans cette premiere Direction, c'est alors que commence la courbe. Pour la continuer, il faut que chaque Point que l'on ajoutera commence une nouvelle Direction différente de celle qui la précéde.

Il suit de-là 1°, que les deux premiers Points élémentaires d'une Ligne ne suffisent pas pour la caractériser; & que c'est le troisiéme qui décide de sa nature. Car la Ligne courbe, ainsi que la droite, commence par deux Points qui, placés l'un près de l'autre, forment une premiere Direction, laquelle continuée, donne la Ligne droite; laquelle changée, donne la courbe,

2°. Que l'on doit regarder la Ligne courbe comme un composé d'une infinité de Lignes droites infiniment petites. Car la Direction que forment les deux premiers Points est une direction droite, & par conséquent peut être considérée comme une Ligne droite infiniment petite. La seconde Direction formée par le second & le troisiéme Point, est encore le commencement d'une seconde Ligne droite, & ainsi à l'infini. Or toutes ces petites Lignes droites, Elémens de la Courbe, doivent être des infiniment petits, comme le sont les Elémens de quelque Ligne que ce soit.

La Ligne droite, quand même on la prolongeroit à l'infini, est toujours uniforme dans sa marche. *Elle* n'admet ni plus ni moins de Rectitude; parcequ'une Ligne est tout-à-fait droite, ou ne l'est point du tout. D'un Point à un autre on ne peut tirer qu'une seule Ligne droite; & toute autre Ligne droite qu'on entreprendroit de tirer dans cet intervalle, couvriroit nécessairement la premiere & se confondroit avec elle. Deux Points de cette Ligne suffisent pour en déterminer la marche; parceque c'est par tout la même Direction; & que ce qui est absolument *même*, n'est pas susceptible de la moindre différence. Fig. 2.

Il faut dire tout le contraire de la Ligne courbe. Elle admet plus ou moins de Courbure, selon que le changement de Direction qui se fait à chaque Point, est plus ou moins considérable. On peut tirer une infinité de Lignes courbes du Point A au Point B, parcequ'une

Ligne peut s'écarter à l'infini de la Rectitude. Enfin il faut plus de deux Points pour en déterminer la marche.

La Ligne droite est la plus courte qu'on puisse tirer d'un Point à un autre, du Point A au Point B; parceque dans le cours de cette Ligne, tout tend directement de A en B, & de B en A. La Ligne courbe au contraire, n'allant de A en B que par un détour, plus ce détour est grand, & plus la Courbe est longue.

Plus une Ligne droite se prolonge, & plus les Points ajoutés s'éloignent du Point A dont on est parti. Mais dans la Courbe, il est évident que le troisiéme Point qui change la premiere Direction, s'éloigne moins du premier, que s'il avoit suivi la premiere route. D'où il résulte qu'après un détour plus ou moins grand, les Points subséquens se rapprochent du premier, & quelquefois même viennent s'y rejoindre.

Fig. 3. Il est important d'observer que ce changement perpétuel dans la Courbe, peut se faire avec plus ou moins de régularité. Ayant les deux premiers Points & le troisiéme qui s'écarte de la premiere Direction; si le quatriéme s'écarte de de la seconde Direction, précisément de même que le troisiéme s'est écarté de la premiere: si le cinquiéme s'écarte de la troisiéme Direction dans le même rapport, & de même les Points subséquens sans aucune altération, alors la Courbe sera parfaitement uniforme dans sa marche, autant que l'uniformité peut convenir au changement continuel; & l'on comprend qu'après avoir

avoir tourné autour d'un Point commun, toujours à distance égale, elle viendra rejoindre le Point dont elle étoit partie. C'est la *Ligne circulaire*, la plus réguliere de toutes les Courbes.

Au contraire, si cet écartement de la Rectitude se fait toujours à chaque Point en raison différente des écartemens précédens, la Courbe sera tout-à-fait irréguliere.

Mais il est un milieu : la Courbe après avoir procédé irrégulierement pendant un certain espace, peut reprendre sa premiere course à rebours ; ensorte que l'écartement par où le second espace commence, soit comme le dernier écartement du premier espace ; le second, comme le penultiéme de l'espace précédent, & les autres de suite en rétrogradant.

Dans cette supposition il est évident 1°, que la Courbe doit être allongée, & non parfaitement ronde comme la circulaire. 2°. Qu'elle aura cependant une certaine régularité, en ce que les parties correspondantes auront la même courbure. Telles sont les Courbes ellyptiques, paraboliques, hyperboliques, &c.

Il est inutile de pousser plus loin ce parallele de la Ligne droite & de la Ligne courbe. Il suffit de nous être formé une idée nette de leur nature & de leur construction. Considérons-les maintenant séparément l'une de l'autre.



Liv. I. Chap. I. §. I.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA LIGNE DROITE.

§. I.

Des diverses positions ou situations que deux Lignes droites peuvent avoir réciproquement.

EN comparant deux Lignes droites, on ne peut imaginer que trois situations où elles puissent être l'une à l'égard de l'autre : sçavoir, la Situation *parallele*, la *perpendiculaire* & l'*oblique*.

Position parallele. Fig. 4.

1. Deux Lignes droites peuvent être tellement disposées, qu'elles conservent entr'elles la même distance dans toute leur Longueur. Cette premiere Situation se nomme *parallele*; & nous est représentée sensiblement par une allée parfaitement tracée au Cordeau.

Il est important de remarquer que le plus ou le moins de distance entre ces Lignes, ne fait rien à leur *Parallélisme*; & que cette distance peut être augmentée ou diminuée, sans que le Parallélisme en souffre, pourvû qu'augmentée ou diminuée, elle soit toujours la même entre les Points correspondans. Cette distance pourroit même être anéantie sans que les Lignes cessassent d'être paralleles. On n'a qu'à les supposer exactement posées l'une à côté de l'autre sans aucun intervalle. Leur Parallélisme consisteroit alors

à ſe toucher dans toute leur Longueur, ſans jamais s'éloigner ni ſe confondre.

Pour concevoir encore plus clairement le Parallélisme de deux Lignes droites, ſuppoſons-les d'abord entierement couchées l'une ſur l'autre, enſorte qu'elles ſoient, pour ainſi dire, une ſeule & même Ligne. Qu'une d'entr'elles ſoit enſuite ſéparée de l'autre, par un mouvement uniforme, également répandu dans tous ſes Points. Il eſt évident qu'à quelque intervalle que ſoit portée la Ligne mûe, elle ſera parallele à celle qu'elle a quittée. Car le mouvement étant également répandu dans tous les Points qui la compoſent, tous ces Points s'éloignent également de ceux qu'ils couvroient ſur la Ligne en repos, & tracent dans leur route des Lignes égales, meſures de la diſtance des deux Lignes qui ont été ſéparées.

La Ligne dans ſon mouvement uniforme, a parcouru ſucceſſivement tout l'eſpace compris entre les deux Paralleles; & par conſéquent à chaque Point de ſa marche, elle a tracé une Ligne ſemblable à elle-même. Il eſt évident que toutes ces Lignes, contigues ſans ſe confondre, ſont toutes paralleles les unes aux autres; & par conſéquent aucune Ligne ne peut être parallele à l'une des deux, qu'elle ne le ſoit à l'autre.

On voit manifeſtement par cette deſcription, que la longueur des deux Paralleles ne fait rien à leur Parallélisme. Elles ont toutes les deux leur Direction fixée; & par conſéquent il ne peut arriver aucun changement à leur diſtance mutuelle, quand même on les prolongeroit à l'infini.

LIV. I. CHAP. I. §. I. Position perpendiculaire & oblique. Fig. 5.

2. Lorsque deux Lignes droites ne sont pas paralleles, elles sont tellement disposées, qu'éloignées d'un côté, elles se rapprochent nécessairement par l'autre : elles se rencontrent enfin, ou se rencontreroient si elles étoient suffisamment prolongées.

Mais cette rencontre se fait où par la chûte directe d'une de ces Lignes sur l'autre ; & c'est la situation perpendiculaire : ou par une chûte moins directe ; & c'est la situation oblique.

La chûte perpendiculaire nous est sensiblement représentée par celle d'un corps fort pesant, ou par l'élévation d'un arbre droit & bien planté, & mieux encore par la suspension d'un plomb sur un terrein parfaitement de niveau. Mille exemples nous représentent la chûte oblique.

De deux Lignes droites qui se rencontrent en un Point, nous supposons ordinairement que l'une sert de base à l'autre, c'est-à-dire, que l'une est en repos, & que l'autre vient la frapper. On appelle la premiere, *Ligne horizontale* (*a*) parce qu'elle est représentée par une Ligne droite, que nous imaginons tirée d'un Point de l'horizon à celui qui lui est directement opposé. Et celle que nous supposons tomber sur la Ligne horizontale, s'appelle *Oblique* ou *Perpendiculaire*, selon la maniere plus ou moins directe, dont elle tombe sur l'*horizontale*.

(*a*) Il ne faut pas prendre cette expression à la rigueur. Je ne m'en sers que pour me faire entendre plus aisément. Je sçai bien qu'il n'y a de *Lignes horizontales* que depuis la création du monde, & que la Géométrie est éternelle. Cette note servira pour tous les endroits où je pourrai employer cette expression.

Mais entre deux Lignes qui se rencontrent en un Point, il est indifferent laquelle on prendra pour l'*horizontale*. Car en retournant la Figure, s'il en est besoin, pour fixer l'imagination, celle qui nous paroissoit en repos nous paroîtra tomber; & celle qui paroissoit tomber, paroîtra en repos.

LIV. I. CHAP. I. §. I.

Cette observation nous apprend d'abord une chose assez importante; c'est que le caractere de Perpendiculaire & d'Oblique est réciproque aux deux Lignes qui se rencontrent en un Point: c'est-à-dire, que si la premiere est perpendiculaire ou oblique sur la seconde, la seconde est aussi perpendiculaire ou oblique sur la premiere.

Telles sont les trois situations où deux Lignes droites peuvent être l'une à l'égard de l'autre. Il n'y a personne qui ne s'en forme aisément une idée fort nette & fort distincte. Pour en tirer des vérités géométriques, nous allons les comparer ensemble, en commençant par la Perpendiculaire & l'Oblique.

Comparaison de la Position perpendiculaire, & de l'oblique.

LA Ligne perpendiculaire par sa chûte directe s'éloigne le plus qu'il est possible de la situation parallele. Elle ne montre à la Ligne horizontale que le Point par lequel elle le frappe. En supposant qu'elle partage cette derniere en deux parties, elle ne panche pas plus d'un côté que de l'autre.

Il n'en est pas de même de la Ligne oblique. Celle-ci présente à l'horizontale la suite de ses Points, non pas de front comme la parallele, mais en biaisant plus ou moins. En partageant

Liv. I. Chap. I. §. I. Fig. 6.

l'horizontale en deux parties, elle panche d'un côté, & s'en approche d'autant plus, qu'elle s'éloigne de l'autre.

Pour se familiariser avec ces idées, supposons que la Ligne CD qui rencontre la Ligne horizontale AB, puisse se mouvoir à droite & à gauche sur le Point D, comme sur un pivot. Faisant usage de cette mobilité, je couche d'abord la Ligne CD sur la partie DB de l'horizontale. Dans cette situation, CD n'est ni perpendiculaire ni oblique sur AB; mais parallele, étant couchée sur la partie DB de cette derniere.

Relevons maintenant la Ligne CD sur le Point D, mais peu à peu. Dès le premier pas, elle quitte le Parallélisme & devient oblique sur AB, & même très-oblique, parce qu'elle est encore extrêmement proche de la partie DB de l'horizontale, & fort éloignée de la partie DA de la même Ligne. Mais à mesure que CD s'élevera sur le Point D, elle s'éloignera de la partie DB, & se rapprochera de la partie DA. Ainsi en s'écartant de plus en plus du Parallélisme, elle deviendra moins oblique.

Elle arrivera enfin au milieu de sa course, de façon que le Point C aura autant de chemin à faire pour descendre sur A, qu'il en a fait pour remonter depuis B. Or ceci n'est pas particulier au Point C: tous les autres Points de la Ligne CD se trouveront aussi également éloignés des deux parties de la Ligne horizontale, puisque tous ont fait, par proportion, le même chemin que le Point C. Le Point *e*, par exemple, qui d'abord étoit couché sur *f* dans la partie DB de

l'horizontale, doit avoir fait la moitié de sa course, lorsque le Point C aura fait la moitié de la sienne; c'est-à-dire, qu'il a autant de chemin à parcourir pour arriver sur *g* dans l'autre partie de l'horizontale, qu'il en a parcouru depuis qu'il a quitté *f*. Il en est de même de tous les Points de la Ligne CD, relativement aux Points sur lesquels ils étoient couchés sur la partie DB, & à ceux où ils arriveront sur la partie DA. Ainsi la Ligne CD dans toute sa longueur, sera également éloignée des deux parties de l'horizontale séparées par le Point D. C'est cette situation de CD sur AB que l'on nomme *perpendiculaire*, situation la plus opposée qu'il se puisse à la parallele.

Continuons de faire mouvoir la Ligne CD sur le Point D, & vers la partie DA de l'horizontale. Dès le premier pas, elle cessera d'être perpendiculaire, & deviendra oblique de nouveau; parce que quittant le juste milieu entre les deux parties de la Ligne horizontale, elle s'éloignera de DB tout autant qu'elle s'approchera de DA, jusqu'à ce qu'enfin couchée sur cette partie DA, elle ne soit plus ni oblique ni perpendiculaire.

Observons que lorsque CD cesse d'être perpendiculaire, elle devient oblique dans un sens contraire à sa premiere Obliquité. Car dans son trajet en montant, elle étoit plus près de la partie DB que de la partie DA; au lieu qu'en descendant elle est toujours plus près de la partie DA que de la partie DB.

LIV. I. CHAP. I. §. I.

CEtte marche de la Ligne CD établit d'une maniere sensible la vérité de plusieurs Propositions de Géométrie, sans qu'il soit besoin de recourir à de longues démonstrations.

I.

Fig. 6. *Si une Perpendiculaire CD a un de ses Points, comme C, également éloigné de deux Points A & B de la Ligne AB sur laquelle elle tombe, tous les autres Points de la Perpendiculaire, comme e & D, seront également distans de A & de B.*

Car si le Point *e* étoit plus près de A que de B, la Ligne CD seroit en cet endroit plus près de la partie DA de l'horizontale que de la partie DB de la même Ligne; & par conséquent CD ne seroit plus Perpendiculaire, ce qui est contre la supposition.

De même: *Si une Ligne droite telle que CD a deux Points, comme C &* e, *chacun également distans de deux Points A & B de la Ligne horizontale, chacun des autres Points de CD sera également distant de A & de B; & la Ligne sera perpendiculaire sur AB.*

Car les deux Points C & *e* qui déterminent la Direction de la Ligne CD, tenant le juste milieu entre les Points A & B de l'horizontale, tous les autres Points de CD seront nécessairement dans ce juste milieu, quand même on la prolongeroit jusqu'à l'infini.

2.

Fig. 6. *Il ne peut y avoir de Lignes plus perpendiculaires les unes que les autres.*

Car la Perpendicularité n'est pas susceptible

de plus ou de moins. Le milieu juste, où notre Ligne CD est parvenue dans son trajet de B en A, lorsqu'elle est devenue perpendiculaire, est une situation unique & indivisible. La Ligne CD perpendiculaire est également distante des deux côtés de l'horizontale. Pour peu qu'elle quitte ce poste, il n'y a plus d'égalité, & la Perpendicularité s'évanouit.

Il est évident au contraire, qu'*une Ligne peut être plus où moins oblique*, parce qu'elle peut être plus ou moins panchée sur la Ligne qu'elle rencontre. Dans le trajet que nous avons fait faire à la Ligne CD, nous l'avons vue dans toutes les situations où elle peut être oblique, & plus ou moins oblique, sur les deux parties de la Ligne horizontale.

3.

D'un Point, comme D, dans la Ligne AB, on ne peut élever qu'une seule Perpendiculaire: ou, ce qui est la même chose : *d'un Point, comme C, hors la Ligne AB, on ne peut abbaisser qu'une seule Perpendiculaire.* Fig. 6. & 7.

Car dans l'un & dans l'autre cas, il faut que la Perpendiculaire soit également distante des deux parties de la Ligne horizontale qu'elle sépare au Point D. Or, comme nous l'avons déja dit, ce juste milieu est unique & indivisible. Il faut donc que tous les Points de la perpendiculaire y soient exactement placés. Donc toute autre perpendiculaire que l'on voudroit abbaisser du Point C, ou élever du Point D, passeroit nécessairement par la route DC, & couvriroit exactement cette Ligne.

Liv. I. Chap. I. §. I. Fig. 7.

Il eſt évident au contraire, que *du Point D dans la Ligne AB on peut élever; & que du Point C hors la Ligne AB on peut abbaiſſer autant d'Obliques que l'on jugera à propos.*

Il eſt encore évident, que *l'Obliquité de ces lignes élevées ou abbaiſſées dépend de leur éloignement de la Perpendiculaire; que les plus éloignées, ſont les plus obliques; les moins éloignées, moins obliques; & les également éloignées, également obliques.*

Remarquons néanmoins que dans ce dernier cas, *les également inclinées partant d'un même Point, doivent avoir leur Obliquité de côtés différens.* Car pour être également inclinées, il faut qu'elles s'éloignent également de la Perpendiculaire; ce qui ne ſe peut faire du même côté.

4.

Fig. 7. *De toutes les Lignes que l'on peut abbaiſſer du Point C ſur l'horizontale AB, la Perpendiculaire eſt la plus courte, les plus obliques ſont les plus longues, & les également obliques ſont égales.*

Car il eſt évident que la Perpendiculaire tombe directement ſur l'horizontale ſans s'écarter ni à droite ni à gauche; & que les Obliques au contraire ne parviennent ſur l'horizontale qu'en s'écartant plus ou moins. Donc le plus court chemin pour arriver du Point C ſur la Ligne AB, eſt tracé par la Perpendiculaire. Donc, &c.

Comparaiſon des Poſitions perpendiculai-

LA comparaiſon que nous allons faire maintenant de la ſituation parallele avec la perpendiculaire & l'oblique, répandra de nouvelles lumieres ſur cette vérité.

Soient FG Parallele à AB : CD Perpendiculaire aussi sur AB ; & CE Oblique.

[redacted]

Liv. I. Chap. I. §. I.

res & obliques avec la parallele. Fig. 8.

Du Point C partent trois Lignes CG, CD, CE, dont la Direction est déterminée par le second Point qui suit C immédiatement.

La premiere Direction qui va vers G est précisément la même que celle de AB, à la distance près. De sorte que si C étoit transporté en D, le premier Point qui suit C se confondroit avec celui qui suit D ; & ainsi des autres Points subséquens. C'est cette identité de Direction qui forme le Parallélisme des deux Lignes.

Dans la Perpendiculaire CD, le premier Point qui suit C est précisément au-dessous, en s'écartant autant qu'il est possible de la Direction parallele qui va vers G ou vers F. Ce second Point tend donc uniquement à s'avancer vers la Ligne AB, sans qu'on y puisse tendre plus directement.

Dans l'Oblique CE, le second Point n'est pas immédiatement au-dessous de C : il n'est pas non plus à côté ; mais entre les deux. Il forme donc une nouvelle Direction qui tient plus ou moins de la Direction parallele & de la perpendiculaire. Cette nouvelle Direction tend en même tems vers G & vers D ; & comme il est impossible qu'elle parvienne en G ou en D, elle suivra une route intermédiaire qui la conduira sur la Ligne AB, entre D & B.

De cette comparaison des trois situations, il résulte plusieurs vérités importantes, qui n'ont presque besoin que d'être proposées.

LIV. I. CHAP. I. §. I. Fig. 8.

I.

Une Ligne perpendiculaire sur une des Paralleles, l'est aussi sur l'autre.

Nous venons de voir que CD n'est perpendiculaire sur AB, que parceque sa Direction s'écarte également de la Direction parallele qui va vers G & vers F. Donc DC est aussi perpendiculaire sur FG.

2.

Une Ligne oblique tirée entre Paralleles est également inclinée sur l'une & sur l'autre, mais en différent sens.

Car la Direction des deux Paralleles étant absolument la même à la distance près, il est impossible que l'Oblique CE ne soit pas autant inclinée sur la Parallele FG qu'elle l'est sur la Parallele AB.

Mais l'inclinaison change de côté, parce que si CE est panchée à gauche sur AB, elle doit être panchée à droite sur la Parallele supérieure. La même raison qui lui fait regarder la partie AE de la Ligne AB, lui doit faire regarder la partie CG de la Ligne FG.

3.

De toutes les Lignes que l'on peut tirer d'une Parallele à l'autre, la Perpendiculaire est la plus courte, les également obliques sont égales, & la plus oblique est la plus longue.

Fig. 8. La Parallele FG ne peut jamais arriver sur AB, fût-elle prolongée à l'infini. Donc plus une Ligne tiendra de la Direction parallele, & plus elle aura de chemin à faire pour parvenir sur la Parallele inférieure. Donc la plus oblique sera la

plus longue : donc les également obliques seront égales : donc la Perpendiculaire qui ne tient rien du tout de la Direction parallele, & qui ne tend uniquement que vers la Ligne AB, sera la plus courte Ligne que l'on puisse tirer d'une Parallele à l'autre. Liv. I. Chap. I. §. I.

Cette propriété de la Perpendiculaire est si frappante, que les commençans sont tentés de regarder cette Ligne comme la seule droite; & l'Oblique, comme une espéce de Courbe. Tout n'est pas faux dans cette erreur. Car la Perpendiculaire a beaucoup du caractere de la Ligne droite; & l'Oblique, de la Ligne courbe.

En considérant la Ligne AB comme un seul objet, on voit que si l'on ne peut tirer qu'une seule Ligne droite d'un Point à un autre, on ne peut aussi abbaisser qu'une seule Perpendiculaire du Point C sur la Ligne AB; & que si la Ligne droite est la plus courte que l'on puisse tirer d'un Point à un autre, la Perpendiculaire est aussi la plus courte qu'on puisse abbaisser du Point C sur AB. Fig. 7. & 8.

D'un autre côté, comme d'un Point à un autre, on peut tirer plusieurs Courbes, dont la plus courbe est la plus longue, on peut aussi du Point C tirer plusieurs Obliques sur AB, dont la plus longue sera la plus oblique.

La Perpendiculaire est donc la droite par excellence; & l'Oblique, quoique droite, a les qualités de la courbe, relativement à la Ligne AB.

4.

La Perpendiculaire est la mesure exacte de la distance de deux Paralleles.

Car la mesure de la distance d'un Point à un autre, est la Ligne droite, comme étant le plus court chemin. On mesureroit mal cette distance par une Courbe qui peut varier à l'infini. Donc, puisque la perpendiculaire est la plus courte Ligne que l'on puisse tirer d'une Parallele à l'autre, & que les Obliques peuvent varier dans leur Longueur à l'infini, la Perpendiculaire est la seule vraie mesure de l'espace parallele.

5.

Deux Lignes perpendiculaires, dans un espace parallele, sont elles-mêmes paralleles.

Fig. 8. Car il est évident que si l'on fait avancer CD vers LM aussi Perpendiculaire, en conservant toujours à CD la situation perpendiculaire, le Point C arrivera sur L en même tems que D sur M. Car si toutes les deux partant du Point L ne tomboient pas sur M, l'une seroit oblique, & l'autre perpendiculaire : ce qui seroit contre la supposition. Donc dans leur premiere situation l'intervalle CL étoit égal à DM.

De même : *Deux Lignes également obliques entre Paralleles sont aussi paralleles, pourvû que leur inclinaison soit du même sens.*

Car au moyen de l'égalité de l'inclinaison des deux Obliques CE, LN, l'intervalle DE est égal à MN. Donc EN égale CL.

On peut proposer ces vérités d'une maniere encore plus générale & plus lumineuse.

Deux Perpendiculaires élevées sur une Ligne horizontale sont nécessairement paralleles.

Car si ces Lignes n'étoient pas paralleles, elles se rencontreroient en un Point, étant suffi-

samment prolongées. Il seroit donc vrai de dire que d'un Point l'on pourroit abbaisser deux Perpendiculaires sur une Ligne horizontale; ce qui est absurde.

De même: *Deux également obliques en même sens, élevées sur une Ligne horizontale, sont nécessairement paralleles.*

Car si ces Lignes n'étoient pas paralleles, en les prolongeant, elles se rencontreroient en un Point; d'où abbaissant une Perpendiculaire, on verroit deux Lignes également obliques en même sens partir du même Point, & se rendre sur l'horizontale, plus éloignées l'une que l'autre du Point où tombe la Perpendiculaire.

Il n'est pas besoin de prouver que deux également obliques en sens contraires, ne sont point paralleles. Il est évident que ces Lignes tendent mutuellement à se rencontrer en un Point.

6.

Lorsqu'une Ligne droite en coupe une autre, elle ne change pas de Direction.

Soit AB coupée au Point D par la Perpendiculaire CE; & au Point G par l'oblique LM. La partie DE est autant perpendiculaire sur AB, que la partie CD; & la partie GM autant oblique, que la partie LG. Il faut seulement observer que l'Obliquité change de côté dans l'intersection; c'est-à-dire, que si la partie LG est inclinée à gauche au-dessus de la Ligne horizontale, la partie GM sera inclinée à droite au-dessous de la même Ligne. Fig. 9.

Et comme les Paralleles ont la même Direc-

tion, si deux Paralleles, ou un plus grand nombre, sont coupées par la Perpendiculaire CE & par l'Oblique LM, ces deux dernieres Lignes conserveront la même raison de Perpendicularité & d'Obliquité, soit au-dessus, soit au-dessous, soit dans les espaces paralleles; en observant toujours que l'inclinaison des Obliques change de côté dans les intersections & dans chaque espace parallele.

§. II.

LES ANGLES.

L'*Angle* est l'*ouverture de deux Lignes qui se rencontrent en un Point.* Ainsi ce que nous avons dit dans le Paragraphe précédent sur la rencontre des Lignes nous conduit à considérer l'Angle, qui en est le résultat.

Les deux Lignes qui forment l'Angle, en sont les *Côtés*, ou les *Jambes*; & le Point qui les réunit, en est le *Sommet*, ou la *Pointe*.

Le *Sommet* n'est qu'un Point, & non pas l'Angle. Il faut que de ce Point partent deux Lignes selon deux Directions différentes, & qu'elles s'écartent l'une de l'autre à mesure qu'elles sont prolongées.

Cette premiere notion de l'Angle fait comprendre aisément que sa grandeur ou sa petitesse ne dépend en aucune sorte de la longueur ou de la briéveté des Côtés. Un très-grand Angle peut être formé par des Lignes très-petites; & l'on peut prolonger à l'infini les Côtés d'un très-

petit

petit Angle, sans qu'il change de nature. C'est dans le fond de l'Angle qu'il faut descendre pour saisir l'origine de l'ouverture des Lignes ; car c'est-là que l'Angle se forme & se détermine immuablement.

Je suppose trois Points A, B, C rangés sans intervalle en Ligne droite, & par conséquent ne faisant point Angle. Si le Point A se dérange tant soit peu de cette premiere Direction, sans quitter le Point B, c'est alors que l'Angle est formé. Alors commencent les Directions obliques, qui se continuent jusqu'à ce que le Point A, dans son circuit autour du Point B, arrive en un lieu également distant de la place qu'il occupoit d'abord, & de celle qu'occupe le Point C. Dans cette situation les Points A & B forment une Direction perpendiculaire. Les Directions obliques recommencent lorsque A descend vers C, jusqu'à ce que ces deux Points étant confondus, il n'y ait plus d'Angle.

On peut se rendre sensible le jeu des trois Points avec un compas ordinaire. Ouvrez-le d'abord de telle façon qu'il forme une Ligne droite. Les deux Pointes seront A & C, & la charniere sera B. Tenez la jambe BC fermement appuyée sur un Plan horizontal : ensuite relevez peu à peu la jambe AB. Vous verrez toutes les Directions obliques, la situation perpendiculaire, & tous les écartemens que peuvent avoir deux Lignes qui se rencontrent en un Point.

Tous ces écartemens se réduisent à deux, le perpendiculaire & l'oblique. Il y a donc aussi en général deux sortes d'Angles, sçavoir l'Angle

perpendiculaire ou *droit*, & l'Angle *oblique*.

Liv. I. Chap. I. §. II. Fig. 10.

L'Angle droit est formé par la position perpendiculaire de deux Lignes. Nous avons expliqué dans le Paragraphe précédent pourquoi la Perpendiculaire étoit regardée comme la droite par excellence.

L'Angle oblique est formé par la position oblique de deux Lignes. Mais comme cette Obliquité peut consister en ce que l'ouverture des deux Lignes est moindre ou plus grande que l'ouverture perpendiculaire, nous distinguerons aussi deux sortes d'Angles obliques; l'*Aigu*, formé par une ouverture de Lignes moindre que l'ouverture perpendiculaire; & l'*Obtus*, formé par une ouverture plus grande.

L'Angle droit est toujours uniforme, & ne peut être plus ou moins droit; parce que les Perpendiculaires qui le forment, ne peuvent être plus ou moins perpendiculaires. Les Angles obliques au contraire peuvent être plus ou moins aigus, plus ou moins obtus; parce que l'obliquité des Lignes peut augmenter ou diminuer à l'infini.

Ces principes étant établis, les Propositions de Géométrie sur les Angles ne demandent presque aucune discussion.

I.

Une Ligne rencontrant une autre Ligne entre ses extrémités, forme deux Angles, qu'on appelle *Angles de suite*; & *ces deux Angles sont toujours égaux à deux Angles droits.*

Fig. 6. Car la Ligne CD sera perpendiculaire ou oblique sur la Ligne AB.

Si CD est perpendiculaire, elle forme sur AB de part & d'autre un Angle droit.

Si CD est oblique, elle formera d'un côté un Angle aigu, & de l'autre un Angle obtus. Or il est évident que ces deux Angles étant compris dans la capacité des deux droits, sont égaux à ceux-ci. Ce que l'Angle aigu cDB a de moins que le droit, c'est le petit Angle cDC: & ce même petit Angle cDC, est ce que l'Obtus cDA a de plus que le droit. Par conséquent si l'on ôte à l'Angle obtus ce qu'il a de trop, pour le joindre à l'Angle aigu, les deux Angles deviendront égaux & droits. Donc ils étoient égaux à deux droits.

Il suit de-là que si du Point D de la Ligne AB, on éléve des deux côtés de la Perpendiculaire autant de Lignes obliques que l'on voudra, tous les Angles formés par ces Lignes équivaudront à deux droits; puisqu'ils sont compris dans la capacité des deux Angles droits formés par la Perpendiculaire CD.

Il est nécessaire d'avertir ici qu'on appelle *Complement* d'un Angle, l'Angle aigu qu'il faut ajouter à un autre Angle aigu, pour que celui-ci soit égal à un droit; & qu'on appelle *Supplément*, l'Angle aigu qu'il faut ajouter à un Angle obtus, pour que celui-ci vaille deux Angles droits. Ainsi le petit Angle EDC est le *Complement* de l'Angle BDE, parcequ'il s'en faut précisément la valeur de l'un, que l'autre ne soit égal à un Angle droit. De même l'Angle BDE aigu est le *Supplément* de l'obtus ADE; parceque l'obtus joint à l'aigu a la valeur de deux Angles droits. Fig. 14.

2.

Liv. I. Chap. I. §. II.

Une Ligne droite, en coupant une autre Ligne droite, forme quatre Angles, qui pris ensemble, sont égaux à quatre Angles droits.

Fig. 11. & 12. Si la Sécante est perpendiculaire, elle forme quatre Angles droits.

Si la Sécante est oblique, elle forme deux Angles de suite, au-dessus de l'horizontale AB, & deux au-dessous.

Fig. 13. D'où il suit que si plusieurs Sécantes coupent l'horizontale AB au Point D, tous les Angles formés par ces Sécantes équivalent à quatre Angles droits, puisqu'ils sont renfermés dans la capacité des quatre Angles de suite formés par une seule Sécante.

Il faut remarquer que tous ces Angles ont le Point D pour Sommet commun: d'où il résulte,

Fig. 13. que, *si d'un Point marqué sur un Plan, on tire des Lignes droites dans toutes les Directions possibles, tous les Angles formés par ces Lignes sont égaux à quatre Angles droits.*

3.

Des quatre Angles formés par l'intersection de deux Lignes, ceux qui sont opposés par le Sommet sont égaux.

Fig. 11. & 12. Il n'y a pas de difficulté si la Sécante est perpendiculaire. Si la Sécante est oblique, son Obliquité au-dessous de l'horizontale est la même qu'au-dessus; si ce n'est qu'elle change de côté. La Sécante, qui s'approche de l'horizontale au-dessus du côté droit, s'en approche autant au-dessous du côté gauche; & la même Sécante qui s'éloigne au-dessus de l'horizontale

du côté gauche, s'en éloigne autant au-dessous du côté droit. Donc l'Aigu est égal à l'Aigu opposé; & l'Obtus à l'Obtus.

4.

Si d'un Point d'une Parallele on abbaisse une Ligne droite sur l'autre Parallele, les quatre Angles que cette Ligne forme dans l'espace parallele sont égaux à quatre Angles droits.

Cette Ligne formera quatre Angles droits, si elle est perpendiculaire. Si elle est oblique, elle formera deux Angles de suite sur la Parallele supérieure, & autant sur l'inférieure. Fig. 15.

5.

Des quatre Angles formés par une Ligne qui traverse l'espace parallele, les Alternes sont égaux.

On appelle Angles *alternes*, celui qui est sur la Parallele d'en-haut, & celui qui est sur la Parallele d'en-bas, en sens opposé. Tels sont les Angles *o* & *p*, *s* & *t*. Fig. 15.

Les quatre Angles sont droits, lorsque la Ligne traversante est perpendiculaire.

Lorsqu'elle est oblique, elle a la même inclinaison sur la Parallele supérieure & sur l'inférieure, mais en sens différent. Donc l'Aigu est égal à l'Aigu opposé; & l'Obtus à l'Obtus.

6.

Des quatre Angles formés par la Ligne qui traverse l'espace parallele, les deux internes, c'est-à-dire, ceux qui sont du même côté de la Ligne traversante, o *&* t, *ou bien* s *&* p, *sont égaux à deux droits.*

Car *s* & *o* sont Angles de suite égaux à deux droits, de même que *p* & *t*. Or les Alternes *o* & Fig. 15.

p, *s* & *t* sont égaux. Donc pour faire la valeur de deux Angles droits, il est égal de joindre à *t*, *p* ou *o*, & de joindre à *p*, *t* ou *s*.

7.

Une Ligne qui coupe deux Paralleles, forme huit Angles égaux à huit droits.

Fig. 16. Sçavoir, huit Angles droits, si la Sécante est perpendiculaire ; & lorsqu'elle est oblique, deux Angles de suite au-dessus de la Parallele supérieure, deux au-dessous ; & de même deux Angles de suite au-dessus de la Parallele inférieure, & deux au-dessous.

Et comme l'Obliquité de la Sécante est toujours la même, & que seulement elle change de côté, à chaque Parallele qu'elle traverse, il est manifeste que des huit Angles qu'elle forme, les quatre aigus sont égaux entr'eux, ainsi que les quatre obtus.

8.

Lorsqu'une Ligne coupe deux Paralleles, l'Angle externe *est toujours égal à son opposé* interne.

Fig. 16. On appelle Angle *externe* celui que forme la Sécante au-dessus de la Parallele supérieure, & au-dessous de l'inférieure. Ainsi lorsqu'une Sécante traverse deux Paralleles, des huit Angles qu'elle forme, il y en a quatre *externes* & quatre *internes*. Or chaque externe est égal, non à l'interne contigu (ce qui n'arrive que lorsque la Sécante est perpendiculaire); mais à son interne opposé. *b* à *f*, *h* à *d*, *a* à *e*, *g* à *c*. Car les deux Paralleles, étant également inclinées sur la Sécante, forment des Angles égaux dans le même sens, *b* & *f* à droite, *h* & *d* à gauche : *g*

& c à gauche de l'autre côté, *a* & *e* à droite. Liv. I. Chap. II. §. I.

De plus *b* & *d* Angles de suite sont égaux à deux droits : *d* & *f* Angles internes sont aussi égaux à deux droits. Donc l'Angle d sert de supplément à l'Angle *b* & à l'Angle *f*. Or deux Angles dont le supplément est le même, sont égaux entr'eux.

Il est aisé de déterminer par les mêmes principes, ce qui doit arriver, lorsqu'une Sécante coupe trois Paralleles, lorsqu'elle en coupe quatre, ou tel autre nombre que l'on voudra.

CHAPITRE II.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE,

Et des Positions où la Ligne droite peut être à l'égard de cette Courbe.

NOus considérons ici la Ligne circulaire, ou Circonférence du Cercle, moins comme la borne d'une Figure plane, que comme une Courbe dont il faut examiner la formation, & les rapports qu'elle a avec certaines Lignes droites qui lui appartiennent en quelque sorte.

§. I.

FORMATION DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

LA Ligne circulaire ou Circonférence de Cercle est une Ligne courbe, dont tous les Points sont également éloignés d'un Point qu'on appelle Centre.

Liv. I. Chap. II. §. I.

Rappellons-nous ici ce que nous avons déja établi au commencement de ce Livre sur la formation des Lignes. Nous avons prouvé, 1°. que toute Ligne tant droite que courbe doit nécessairement commencer par deux Points placés l'un auprès de l'autre sans intervalle.

2°. Que les deux premiers Points ne décident pas de la Rectitude ou de la Courbure de la Ligne; & que par conséquent c'est le troisiéme Point qui détermine sa nature.

3°. Enfin, que si le troisiéme Point est placé dans la même Direction que les deux premiers, la Ligne est déterminée droite; & courbe, si le troisiéme Point forme une nouvelle Direction différente de la premiere.

Il faut ajouter ici que les trois premiers Points qui décident de la Courbure d'une Ligne, ne déterminent point l'espece de Courbure qu'elle aura dans son prolongement. Car la position du troisiéme Point ne fait que changer la Direction des deux premiers, ce qui est essentiel à toute Ligne courbe. Toutes les Courbes seroient donc de la même espece, si la position des trois premiers Points en déterminoit la nature. C'est donc la position du quatriéme Point, ou, ce qui revient au même, c'est la maniere dont la troisiéme Direction s'écarte de la seconde, qui décide de l'espece particuliere de la Courbe.

Si cette troisiéme Direction s'écarte de la seconde, dans la même raison précisément que celle-ci s'est écartée de la premiere, la Courbe est déterminée circulaire, & d'une parfaite régularité. Pour continuer la Ligne, il faut ajou-

ter Points ſur Points, & qu'à chaque nouveau Point, la Direction change en même raiſon que les précédentes. On conçoit alors que la Courbe tournant uniformement autour d'un Point central, toujours à égale diſtance, viendra rejoindre enfin le premier Point d'où elle eſt partie.

Mais ſi le quatriéme Point forme une troiſiéme Direction qui s'écarte de la ſeconde, autrement que celle-ci s'eſt écartée de la premiere, c'eſt le commencement d'une Courbe différente de la circulaire. Quelle ſera cette Courbe? C'eſt ce qu'on ne peut décider qu'en ajoutant d'autres conditions plus particulieres. Car la différence de raiſons peut varier à l'infini: au lieu que l'identité ſeule eſt ſimple & unique. Mais il eſt inutile d'entrer dans cette Théorie. Nous n'avons beſoin que de la Courbe circulaire, dont il s'agit de développer de plus en plus la formation.

Les trois premiers Points de la Ligne circulaire forment deux Directions obliques l'une ſur l'autre, d'où réſulte un Angle obtus, dont le ſupplément eſt un Angle aigu formé par la ſeconde Direction & par le prolongement de la premiere.

Cet Angle obtus l'eſt infiniment, & le ſupplément eſt infiniment aigu, c'eſt-à-dire, que l'Obtus différe infiniment peu de la valeur de deux Angles droits, & que le ſupplément eſt cette différence infiniment petite. Car ſi la déclinaiſon du troiſiéme Point de la Ligne circulaire formoit un Angle d'une ouverture aſſignable, il ne faudroit qu'un nombre aſſignable de ces Angles,

& par conséquent un nombre fini de Points, pour faire une circonférence de Cercle sensible : chaque Direction de deux Points seroit une Ligne droite dont la longueur pourroit être fixée ; & le Cercle lui-même ne seroit qu'un Polygône d'un nombre fini de côté. Il faut donc concevoir l'Angle formé par les trois premiers Points de la Ligne circulaire, comme un Angle infiniment obtus ; & son supplément, comme un Angle infiniment aigu.

Les trois premiers Points de la Courbe circulaire formant un Angle obtus tel que je l'ai décrit, le quatriéme Point fera avec le second & le troisiéme un second Angle obtus absolument égal au premier : le cinquiéme Point formera un troisiéme Angle, & de même les Points subséquens. De sorte que la Ligne circulaire, considerée en-dedans, n'est autre chose qu'une infinie continuité d'Angles obtus parfaitement égaux, & formés par le changement perpétuel & uniforme de Direction.

Telle est la composition de la Ligne circulaire. Prouvons maintenant que sa construction la rend telle que je viens de la décrire.

Fig. 17. Pour cela supposons une Ligne droite & inflexible CA, mobile sur le Point C comme sur un Pivot. Faisons-la mouvoir par l'extrémité A, ensorte que le Point C ne puisse que tourner sur lui-même sans sortir de sa place. Dès que A sortira de la sienne, on aura deux Points faisant une Direction. Pour marquer un troisiéme Point, il faut que la Pointe A quitte cette premiere Direction, & que le second & le troisiéme Point

en forme une nouvelle. Car si le troisiéme Point étoit dans la premiere Direction, la Ligne CA se seroit allongée, ce qui est contre la supposition. Ces trois premiers Points donneront donc un Angle obtus. Le quatriéme Point sera formé de la même façon, & donnera une troisiéme Direction, & un second Angle obtus. La force qui retient la Ligne CA en C, & qui l'empêche de s'étendre, étant toujours la même, la Pointe A en s'avançant déclinera à chaque pas, & tous les Points de la circonférence du Cercle seront tracés à même distance de C, jusqu'au dernier, qui viendra se coller au Point A, d'où l'on étoit parti.

Cette construction s'exécute d'une maniere sensible par le mouvement d'un Compas, dont on appuye une Pointe de telle façon, qu'elle ne puisse tourner que sur elle-même, pendant que l'autre Pointe décrit une Ligne dont tous les Points sont également distans du Point-milieu, marqué sur le Plan par la premiere Pointe. Telle est la définition de la Ligne circulaire : définition exacte, prise dans la nature de cette Courbe, & dans la maniere de la construire.

DAns tous les Elémens de Géométrie, on a soin d'établir & de prouver, que l'*on peut toujours faire passer une circonférence de Cercle par trois Points donnés, pourvû qu'ils ne soient pas rangés en Ligne droite.*

Ce Théorême semble d'abord ne tendre qu'à la pratique. Mais en le considérant d'une vûe supérieure, on verra qu'il tient intimement à la nature de la Ligne circulaire, telle qu'elle vient

Liv. I. Chap. II. §. I.

d'être expliquée. Pour cela donnons à cette Proposition un peu plus d'étendue qu'on ne lui en donne ordinairement.

1.

On peut faire passer une infinité de Lignes circulaires par deux Points donnés A & B.

Fig. 18. Car si l'on coupe la Direction AB par une Perpendiculaire, qui partage la Direction par la moitié au Point D, chaque Point de la Perpendiculaire sera également éloigné de A & de B. Donc chacun de ces Points peut être le Centre d'une Ligne circulaire qui passera par A & par B. Observons que cette Perpendiculaire peut être prolongée à l'infini.

2.

On ne peut faire passer de Ligne circulaire par trois Points placés dans la même Direction.

Fig. 19. Car ces Points ainsi rangés, déterminent tellement la Ligne droite, qu'il est absurde de les supposer partie d'une Courbe. Aussi n'est-il pas possible de trouver un Point qui soit également éloigné de A, B, & C. Car si d'un Point D l'on tire une Perpendiculaire DB, sur la Direction ABC, les Lignes DA & DC seront obliques, & par conséquent plus longues que DB.

3.

On peut faire passer une Ligne circulaire par trois Points, lorsqu'ils ne sont pas dans la même Direction.

Fig. 20. Car les deux Directions AB, BC étant inclinées l'une sur l'autre, & les deux Perpendiculaires qui les traverseront par le milieu, étant aussi de leur côté inclinées l'une sur l'autre, doivent

se rencontrer en quelque Point D. Or ce Point commun aux deux Perpendiculaires est également éloigné de A & de B, de B & de C, & par conséquent est le Centre d'une Circonférence qui passeroit par les Points A, B, C.

4.

On ne peut faire passer qu'une Ligne circulaire par les trois Points qui ne sont pas dans la même Direction.

Car pour tracer cette Ligne circulaire, il faut trouver un Point également éloigné des trois Points A, B, C. Mais ce Point ne peut se trouver qu'en D, où se réunissent les deux Perpendiculaires, qui coupent par le milieu les Directions AB, BC. Donc il ne peut passer qu'une seule Ligne circulaire par les trois Points A, B, C. Fig. 20.

Et cela ne doit pas étonner, quand on réfléchit sur la nature de cette Ligne. Car trois Points faisant deux Directions, déterminent une Courbe en général, puisqu'ils ne peuvent appartenir à une Ligne droite. Par les trois Points donnés on pourroit donc faire passer d'autres Courbes que la circulaire; mais celle-ci, une fois déterminée par le Point central D, ne peut être sujette à variation, parceque sa marche est absolument uniforme.

Il n'en est pas de même lorsque l'on n'a qu'une Direction AB. Car une seule Direction ne détermine aucune Ligne, parce que toute Ligne commence nécessairement par une premiere Direction. Donc du Point A au Point B on peut tirer toutes sortes de Lignes, d'abord une droite, & ensuite toutes les Courbes imaginables.

Donc on peut faire paſſer par A & B toutes les Lignes circulaires aſſez grandes pour s'étendre jusqu'à A & B.

5.

Une Ligne circulaire peut paſſer quelquefois par quatre Points, & même par un plus grand nombre qui changent de Direction, quoiqu'ils paroiſſent aſſez bizarrement arrangés.

Car il eſt poſſible qu'ils ſe trouvent également diſtans d'un Point-milieu. Si l'on marque au hazard pluſieurs Points ſur une Circonférence; & qu'enſuite la Circonférence diſparoiſſe, ces Points appartiennent à la Ligne circulaire, quelque bizarre que ſoit leur arrangement. Par conſéquent ſi les marquant ſur un Plan, ils ſe trouvoient placés comme ſur la Circonférence, il eſt certain que l'on y pourroit faire paſſer une Ligne circulaire. Mais pour une fois que ce hazard réüſſiroit, il y en auroit mille où l'on manqueroit ſon coup. Ayant les trois Points A, B, C: ſi je veux faire une troiſiéme Direction avec un quatriéme Point D, il s'agit de ſçavoir où je le placerai. Car il faut que la Perpendiculaire qui coupera par le milieu la nouvelle Direction CD aille ſe réunir aux deux autres au Point E. Or l'on comprend que ce ſeroit le plus grand hazard du monde; ſi la choſe s'exécutoit avec une ſi grande préciſion, lorſqu'on place le quatriéme Point D par caprice, & ſans ſuivre de régles certaines.

Fig. 21.

La raiſon en eſt fort ſimple. Trois Points formant deux Directions appartiennent à toutes ſortes de Courbes. Par conſéquent on y peut

faire passer un Cercle, une Ellypse, &c. Mais le quatriéme Point déterminant l'espece de la Courbe, il faut lui donner la position qui convient à l'espece de Courbe qu'on y veut faire passer.

6.

On fera sûrement passer une Ligne circulaire par quatre Points, & même par autant de Points que l'on voudra, à deux conditions: la premiere, que les Points soient placés à égale distance: la seconde, que les Directions qui changent à chaque nouveau Point, soient également inclinées les unes sur les autres, ensorte que tous les Angles formés par trois de ces Points soient parfaitement égaux.

Car nous avons montré que quatre Points, formant trois Directions également inclinées, déterminent immuablement la Ligne circulaire. Nos Points situés à égale distance les uns des autres, imitent autant qu'il est possible la contiguité des Points de la Courbe. Enfin leur position uniforme a tellement le caractere de la Circonférence du Cercle, qu'on voit clairement qu'ils en font partie; & que pour la décrire en entier, il ne s'agiroit que de suppléer les Points intermédiaires. Par conséquent tous ces Points sont également éloignés d'un Centre commun, qui seroit le Point d'intersection de toutes les Perpendiculaires tirées par le milieu de chaque Direction.



§. II.

DES LIGNES DROITES

Tirées soit au-dedans soit au-dehors de la Ligne circulaire.

I.

Raïon.
Fig. 17.

LA principale de ces Lignes est le *Raïon*, c'est-à-dire, cette Ligne CA, par le mouvement de laquelle nous avons conçu la construction de la Circonférence du Cercle. CA est répétée autant de fois qu'il y a de Points dans la Circonférence, & mesure la distance de ces Points au Point-milieu, que l'on nomme *Centre*. Cette distance est toujours la même; & par conséquent tous les Raïons du Cercle sont égaux. Vérité simple, mais d'une admirable fécondité.

II.

Diamétre.
Fig. 22.

On appelle *Diamétre*, le Raïon AC prolongé dans la même Direction depuis le Centre jusqu'au Point opposé de la Circonférence. Ainsi le Diamétre est double du Raïon. Donc tous les Diamétres sont égaux: donc ils passent tous par le Centre: donc si l'on pouvoit fixer le nombre des Raïons, il seroit double du nombre des Diamétres.

La grande propriété du Diamétre est de diviser la Ligne circulaire en deux parties égales.

Ayant le Diamétre ou double Raïon AB: que le

le Raïon CB soit immobile, pendant que AC s'élevera sur le Point fixe C. Au premier pas qu'il fera, les deux Raïons, qui d'abord n'étoient qu'une Ligne droite, commenceront à faire Angle ; & le Raïon AC entamera les Directions obliques dont nous avons tant parlé. Arrivé au Point *a*, il sera perpendiculaire, & passera ensuite par tous les degrés d'Obliquité, jusqu'à ce qu'il soit arrivé sur le Raïon BC.

Liv. I. Chap. II. §. II.

Continuant sa route par en bas, il reprendra les Directions obliques, deviendra perpendiculaire au Point *a* inférieur, & pour la quatriéme fois il épuisera toutes les Directions obliques, en remontant jusqu'en A.

Ce mouvement du Raïon AC démontre qu'il a fait autant de chemin en allant, soit de A en B, soit de B en A. Donc la portion circulaire AB est égale à la portion BA : Donc le Diamétre AB divise la Ligne circulaire en deux parties égales, ou bien en deux demi-Circonférences.

III.

ON appelle *Corde* toute Ligne droite tirée d'un Point de la Circonférence à un autre ; & *Arc*, cette partie de la Circonférence soutenue & comme retranchée par la Corde.

Les Cordes. Fig. 23.

Le Diamétre est compris dans la généralité de cette définition. Rien n'empêche en effet qu'on ne le mette au nombre des Cordes ; avec cette prérogative cependant, que seul de toutes les Cordes il passe par le Centre ; qu'il divise la Circonférence en deux parties égales ; & qu'il a pour Arc l'une ou l'autre des deux demi-Circonférences qu'il sépare.

Liv. I. Chap. II. §. II.

La comparaison du Diamétre avec les autres Cordes, donne les Propositions suivantes.

I.

De toutes les Cordes, celle qui passe par le Centre du Cercle est la plus grande.

Fig. 23. Car elle soutient une demi-Circonférence entiere, au lieu que les autres soutiennent des Arcs moindres.

La seule inspection de la demi-Circonférence soutenue par le Diamétre, suffit pour rendre cette vérité palpable. Les deux Points de la Circonférence qui sont au-dessus des extrémités A & B du Diamétre, ne s'élévent pas perpendiculairement, mais commencent de part & d'autre une Direction oblique. Les Points subséquens par des changemens de Direction pareils se rapprochent de plus en plus, à mesure qu'ils s'éloignent du Diamétre, jusqu'à ce qu'enfin les deux Côtés latéraux de cette voute se joignent en un Point également éloigné des extrémités du Diamétre AB.

D'où il suit 1°, qu'*une Corde est d'autant plus grande ou plus petite, qu'elle est plus proche ou plus éloignée du Centre du Cercle.*

2°. *Que les Cordes également éloignées du Centre, sont égales.*

3°. *Que les Arcs soutenus par des Cordes égales, sont égaux; & d'autant plus grands ou plus petits, que leurs Cordes sont des Lignes plus longues ou plus courtes.*

4°. *Que les Cordes proprement dites, ne mesurent que des portions de Longueur ou de Largeur dans le Cercle: au lieu que celle qui passe*

par le Centre, est appellée par excellence le Diamétre *du Cercle, parcequ'elle le mesure en tout sens dans sa plus grande Longueur & Largeur.* LIV. I. CHAP. II. §. II.

2.

Un Diamétre perpendiculaire sur une Corde, la coupe en deux parties égales.

Car le Centre du Cercle est également éloigné des Points A & B communs à la Corde & à la Circonférence. Or le Centre est un des Points du Diamétre perpendiculaire. Donc tous les Points du Diamétre perpendiculaire, & par conséquent le Point D, commun au Diamétre & à la Corde, sont également éloignés de A & de B. Donc, &c. Fig. 24.

D'où il suit 1°, que *le même Diamétre EF coupe en deux parties égales les deux Arcs que sépare la Corde AB.* Car les Points E & F communs au Diamétre & à la Circonférence, sont chacun à une distance égale des Points A & B extrémités de la Corde. Donc la Corde qu'on tireroit de E en A, seroit égale à celle de E en B: & celle de F en A, à celle de F en B.

Il suit 2°, que *si le Diamétre est perpendiculaire sur un autre Diamétre, la Circonférence sera coupée en quatre parties égales.* Fig. 25.

3.

Lorsque deux Cordes sont paralleles, les Arcs compris entr'elles sont égaux.

C'est une suite de l'uniformité qui regne dans la Courbure de la Ligne circulaire. Car il est de l'essence du Parallélisme, que les Lignes semblablement tirées dans l'espace parallele, soient égales, les Perpendiculaires, aux Perpendicu- Fig. 26.

laires; les Obliques, aux également obliques: donc les Courbes, aux également courbes.

D'où il suit 1°, que *si au lieu de deux Cordes paralleles, on avoit une Corde HK parallele à une Ligne LM, qui ne toucheroit le Cercle qu'au seul Point E, les Arcs compris entre ces Paralleles seroient égaux, l'Arc EH à l'Arc EK.*

2°. Que *si au lieu d'une Corde & d'une Tangente paralleles, on avoit deux Tangentes paralleles LM, OP, les Arcs compris entre ces Paralleles seroient égaux.* Ces Arcs seroient deux demi-Circonférences. Nous parlerons incessamment de ces Lignes tangentes.

IV.

Les Sécantes.

QUoique les Raïons, les Diamétres & les Cordes pussent être regardés comme des Sécantes du Cercle dont elles coupent en effet la Circonférence, on ne donne néanmoins pour l'ordinaire le nom de *Sécantes* qu'à des Lignes qui dans le Cercle ne sont ni Diamétre ni Corde.

Fig. 27. & suiv.

Il y a deux sortes de Sécantes: les extérieures qui partent d'un Point hors du Cercle, telles que AB, AD; & les intérieures, qui partant d'un Point pris dans l'intérieur du Cercle, ne coupent la Circonférence que dans un seul Point.

I.

Fig. 27.

Les Sécantes extérieures partant d'un Point A hors du Cercle en coupent d'abord la partie convexe, pour arriver ensuite à sa partie concave. On peut donc les considérer en entier, ou seulement dans leur partie extérieure *Ab*, ou *Ad*.

En ne considérant que cette partie, on doit dire, que *de toutes les Sécantes extérieures, celle*

qui, prolongée passeroit par le Centre, est la plus courte.

Car il est manifeste que du Point A, le plus court chemin pour parvenir à la convexité du Cercle, est la route qui conduit au Centre, c'est-à-dire, de A en *b*, qui par rapport au Point A est l'endroit le plus élevé de la Circonférence. Donc A*b* est plus courte que A*d*.

Si l'on tire au Point *b* une Ligne LM perpendiculaire à A*b*, A*d* sera non-seulement oblique sur LM, mais elle passera outre. Donc A*d* est plus longue que A*b*.

C'est tout le contraire lorsqu'on considere les Sécantes extérieures dans toute leur longueur, depuis le Point A jusqu'à la concavité du Cercle. Il faut dire alors, que *de toutes les Sécantes extérieures, celle qui passe par le Centre est la plus longue; & la plus courte, celle qui s'en éloigne le plus.*

Car le Point B est visiblement le plus enfoncé dans la concavité du Cercle relativement au Point A, comme le Point *b* est le plus haut de la convexité. Par conséquent, le chemin le plus court pour aller du Point A jusqu'à la concavité du Cercle, n'est pas de parcourir toute la profondeur du Diamétre, mais plutôt de suivre la Corde qui retrancheroit le plus petit Arc de la Circonférence.

Si l'on tire du Point A une Ligne qui touche simplement le Cercle au Point F, sans entamer la Circonférence, cette Ligne plus longue qu'aucune de celles qui s'arrêtent à la convexité du Cercle, est en même tems plus courte qu'aucune

de celles qui coupent la Circonférence. Car si l'on fait approcher AF de la Sécante diamétrale AB, elle entrera dans le Cercle; mais il faudra qu'elle s'allonge pour atteindre jusqu'à la concavité, par exemple, pour devenir la Ligne AD. Elle s'allongera donc toujours de plus en plus en descendant vers B, jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la grande Sécante diamétrale AB.

2.

Les Sécantes intérieures sont de deux sortes. Elles partent d'un Point placé au-dessus du Centre, ou d'un Point placé au-dessous. Je ne parle point de celles qui partiroient du Centre même: ce sont des Raions.

De toutes les Sécantes intérieures de la premiere sorte, la plus longue est celle qui passe par le Centre.

Fig. 28. Car le Point B où cette Ligne aboutit, est dans la plus grande profondeur de la concavité du Cercle relativement au Point A. Achevons le Diamétre par la Ligne ponctuée A*d*. Il est évident qu'en faisant circuler cette petite Ligne autour du Point A, il faut pour qu'elle touche à la Circonférence, qu'elle s'allonge à mesure qu'elle descend vers B, jusqu'à ce qu'elle soit confondue avec AB.

Fig. 29. D'où il suit, que *de toutes les Sécantes intérieures de la seconde sorte, la plus courte est celle, qui prolongée, passeroit par le Centre.*

Il est inutile de s'étendre davantage sur ces Lignes sécantes dont on fait assez peu d'usage dans la Géométrie.

V.

Liv. I. Chap. II. §. II. La Tangente.

On appelle *Tangente, une Ligne droite qui touche le Cercle, sans pénétrer dans sa capacité intérieure.*

Je me contenterai d'exposer ici ce qu'on trouve dans les Elémens ordinaires de Géométrie sur la nature & les propriétés de cette Ligne importante.

I.

Une Perpendiculaire AB sur l'extrémité du Raïon du Cercle ne touche la Circonférence qu'en un seul Point. Fig. 30.

Car le Raïon CA est aussi perpendiculaire sur AB, & par conséquent la plus courte Ligne que l'on puisse y tirer du Centre. Toute autre Ligne tirée du même Point sur AB seroit oblique, & plus longue que le Raïon CA. Or une Ligne tirée du Centre ne peut être plus longue qu'un Raïon, à moins qu'elle ne sorte de la Circonférence du Cercle. Donc tous les autres Points de la Ligne AB, quelques proches qu'ils puissent être de A, sont hors de la Circonférence : Donc la Ligne AB ne touche le Cercle qu'au Point A. Telle est la propriété essentielle de la Tangente.

2.

On ne peut faire passer aucune Ligne droite entre le Cercle & la Tangente.

Toute autre Ligne droite, comme EA, qui viendroit aboutir au Point A, entreroit necessairement dans la Circonférence. Car puisque le Raïon CA est perpendiculaire sur la Tangente AB, il doit être oblique sur toute autre Ligne non

LIV. I. CHAP. II. §. II.

parallele à AB, & par conséquent sur la Ligne EA. Donc une Perpendiculaire tirée du Centre sur cette Ligne EA seroit moins longue que le Raïon, & par conséquent rencontreroit EA dans l'intérieur du Cercle.

On peut abbaisser EA tant que l'on voudra ; le même raisonnement aura lieu, jusqu'à ce que cette Ligne soit confondue avec FA prolongement & continuation de la Tangente.

3.

On peut faire passer une infinité de Lignes circulaires entre le premier Cercle & la Tangente, sans que celle-ci touche ces Lignes circulaires en plus d'un Point.

Soit le Raïon CA prolongé en en-haut jusqu'à *c*; & de l'intervalle cA, soit décrit un nouveau Cercle plus grand que le premier. Il est évident par la précédente Proposition, que le grand Cercle, non plus que le petit, n'aura que le Point A de commun avec la Tangente. Car le Raïon cA perpendiculaire sur AB, est la plus courte Ligne qu'on puisse tirer du Centre *c* sur la Tangente. Donc toute autre Ligne tirée du Point *c* sur AB seroit oblique ; par conséquent plus longue; par conséquent sortiroit de la Circonférence.

On peut prolonger en en-haut à volonté le Raïon cA, & de chaque Point décrire de nouvelles Lignes circulaires, qui par la même raison ne toucheront la Tangente qu'au seul Point A.

4.

Toutes ces Lignes circulaires ne se touchent non plus qu'au Point A.

Car si le Point qui suit A dans le grand Cercle, étoit encore confondu avec le Point qui suit A dans le petit, les changemens de Direction seroient les mêmes dans les deux Cercles : leur Courbure ne seroit pas différente ; & comme la Courbure circulaire est uniforme dans sa marche, les deux Circonférences continueroient de confondre leurs Points, & de ne faire qu'un seul Cercle : ce qui seroit contre la supposition.

Telles sont les quatre célébres Propositions sur la nature de la Tangente. Elles paroîtront démontrées à ceux qui n'y donneront qu'une attention superficielle. Mais pour peu qu'on veuille approfondir, on s'appercevra que cette matiere est susceptible de difficultés considérables, qui demandent de nouveaux éclaircissemens. Je renvoye cette discussion au Livre suivant, où je traiterai plus à fond des Elémens de l'Etendue.

---

§ III.

DE LA LIGNE CIRCULAIRE,

Considerée comme mesure des Angles.

NOus n'avons pas eu besoin de recourir à la Ligne circulaire pour connoître la nature des Angles & leurs propriétés. La simple position de deux Lignes droites qui se rencon-

Liv. I. Chap. II. §. III.

trent en un Point, a suffi pour nous en donner une idée nette, & pour en développer les dépendances. Mais il faut avouer que la considération de la Ligne circulaire répand un grand jour sur cette matiere.

En effet, à l'exception de l'Angle droit que la position perpendiculaire de deux Lignes rend toujours uniforme & toujours le même, les aigus & les obtus n'ont point d'état fixe, & sont susceptibles de plus ou de moins à l'infini. Il faut donc une mesure exacte pour en déterminer la grandeur; & la Circonférence de Cercle nous donne cette mesure simple & naturelle que nous cherchons.

Rappellons en peu de mots ce que nous avons établi dans le premier chap. de ce livre, §. II.

Fig. 11. Nous avons vu 1°. que lorsque deux Lignes droites se coupent perpendiculairement, elles forment quatre Angles droits, dont le Sommet commun est au Point d'intersection.

Fig. 12. 2°. Que lorsque deux Lignes se coupent obliquement, elles forment quatre Angles, deux aigus, & deux obtus; que les deux aigus sont égaux entr'eux, ainsi que les deux obtus: qu'un aigu & un obtus pris ensemble sont égaux à deux droits; & qu'enfin les quatre valent quatre droits.

Fig. 13. 3°. Que si l'on fait passer par le Point d'intersection de deux Lignes droites autant d'autres Lignes que l'on voudra; tous les Angles formés par cette multitude de Lignes, équivaudront nécessairement à quatre Angles droits.

D'où nous avons conclu, que si d'un Point,

on tire de divers côtés autant de Lignes qu'on [redacted]
jugera à propos, ce Point sera le Sommet commun d'une multitude d'Angles, qui, pris ensemble, en valent quatre droits. Liv. I. Chap. II. §. III.

Ce Point, principe d'une infinité de Directions différentes, nous représente trop sensiblement le Centre d'un Cercle, d'où partent une infinité de Raïons, pour que l'on puisse s'y méprendre. Par conséquent, si de ce Point pris pour Centre, l'on décrit une Circonférence qui coupe toutes ces Lignes, il est évident que les Arcs compris entre les côtés de ces Angles seront leur mesure; que plus l'Angle sera grand, & plus l'Arc le sera aussi; & qu'enfin tous ces Angles pris ensemble étant égaux à quatre droits, la Circonférence entiere sera propre à mesurer quatre Angles droits ou leur valeur. Entrons en quelque détail. Fig. 31.

Deux Lignes se coupant perpendiculairement, si du Point d'intersection pris pour Centre, on décrit une Circonférence, qui coupe les quatre côtés des quatre Angles droits, la Circonférence se trouvera partagée en quatre Arcs égaux, dont chacun sera la mesure d'un Angle droit. Ainsi l'Angle droit étant toujours le même, sa mesure sera toujours le quart de la Circonférence d'un Cercle. Fig. 32.

Si deux Lignes se coupent obliquement; & que du Point d'intersection pris pour Centre, on décrive une Circonférence qui coupe les quatre côtés des quatre Angles, dont le Sommet commun est le Centre du Cercle, la Circonférence se trouvera partagée en quatre Arcs, deux Fig. 33.

Liv. I. Chap. II. §. III.

grands & deux petits, qui tous ensemble forment la mesure de quatre Angles droits, parceque tous ensemble sont égaux à quatre quarts de la Circonférence. De plus les Angles opposés étant égaux, les Arcs qui les mesurent sont égaux aussi. En effet, en ajoutant à l'un des grands Arcs l'un des petits à volonté, le grand & le petit joints ensemble sont une demi-Circonférence.

Fig. 34. De même encore, si une Ligne DC tombe sur l'horizontale AB sans la traverser, les deux Angles de suite formés par cette Ligne étant égaux à deux droits, ont aussi pour mesure totale une demi-Circonférence. Car du Point de réunion C pris pour Centre, on peut décrire une demi-Circonférence dont la Ligne horizontale ou partie de cette Ligne sera le Diamétre; & la demi-Circonférence sera coupée en deux Arcs par la Ligne DC qui forme les Angles de suite.

Fig. 6. & 34. Rappellons-nous que c'est par le mouvement de ce Raïon CD sur le Point C que nous avons déterminé tous les états d'aigu & d'obtus par lesquels un Angle peut passer. Appliquons-y la mesure circulaire.

Si le Raïon CD est couché sur la partie CB de la Ligne horizontale, il n'y a point d'Angle, & la demi-Circonférence dont AB est Diamétre, n'est coupée en aucun endroit. Mais dès que CD commence à se relever, l'Angle aigu se forme du côté de CB, & l'Angle obtus du côté de CA. Alors le Raïon CD partage la demi-Circonférence en deux Arcs; l'un très-petit, mesure du petit Angle aigu; & l'autre très-grand, mesure de l'Angle obtus.

A mesure que le Raïon mobile se relevera, l'Angle aigu deviendra plus grand, ainsi que l'Arc qui le mesure; & l'Angle obtus diminuera avec son Arc, jusqu'à ce qu'enfin le Raïon CD devenant perpendiculaire sur le Diamétre AB, formera deux Angles droits, & coupera aussi la demi-Circonférence en deux Arcs égaux.

Le Raïon CD en descendant ensuite vers la partie CA du Diamétre, fera passer l'Angle aigu de ce côté, & l'Angle obtus du côté de CB: & l'on verra l'Angle aigu diminuer avec son Arc, & l'Angle obtus & son Arc augmenter à proportion, à mesure que le Raïon descendra, jusqu'à ce que confondu avec CA, il n'y ait plus d'Angle.

Il suit de tout ce qui vient d'être établi, 1°. que tout Sommet d'un Angle quelconque doit être considéré comme le Centre d'un Cercle, & les côtés de l'Angle, coupés par la Circonférence, comme les Raïons de ce même Cercle.

2°. Que l'Arc compris entre les côtés de l'Angle, est la mesure de sa grandeur ou de sa petitesse: ensorte que l'Angle est plus grand ou plus petit, selon que l'Arc compris entre ses côtés est une portion plus ou moins considérable de la Circonférence du Cercle.

3°. Que la mesure d'un Angle droit étant le quart d'une Circonférence, on doit dire en général que la mesure de l'Angle aigu est un Arc plus petit, & celle de l'Angle obtus, un Arc plus grand que le quart de la Circonférence.

4°. Enfin, que l'Arc qui mesure un Angle ob-

Liv. I. Chap. II. §. III.

tus eſt toujours moins grand qu'une demi-Circonférence. Car le Diamétre qui la ſoutient n'étant qu'une Ligne droite, ne forme point d'Angle.

Pour rendre cette admirable meſure d'un uſage plus commode, les Géométres ſont convenus de diviſer la Circonférence du Cercle en 360 parties égales ou Degrés: chaque Degré, en 60 Minutes: chaque Minute, en 60 Secondes, &c. Ce nombre de 360 eſt arbitraire; mais il méritoit la préférence ſur tout autre; parceque de tous les nombres, c'eſt celui qui fournit le plus de diviſions en Moitiés, Quarts, demi-Quarts, &c. Tiers, demi-Tiers, &c.

Par ce moyen, on ſpécifie très-aiſément la grandeur de tous les Angles que l'on veut meſurer. 360 Degrés ſont la meſure de quatre Angles droits: 180 de deux; & 90 d'un Angle droit.

Et comme l'Angle obtus a pour meſure un Arc de plus de 90 Degrés; & l'aigu, un Arc moindre, leur grandeur ſera très-exactement déterminée, quand on pourra dire du premier, par exemple, qu'il eſt de 100 Degrés, de 120, de 130, &c. & du ſecond, qu'il eſt de 60, de 45, de 30, &c.

Mais il eſt très-important de ſe convaincre que l'Arc d'un petit Cercle eſt tout auſſi propre à meſurer un Angle, que l'Arc d'un Cercle plus grand. L'eſſentiel eſt que cet Arc quelconque ſoit compris exactement entre les deux côtés de l'Angle, & tracé du Sommet pris pour Centre. En effet nous avons vû que la grandeur ou la

petiteſſe de l'Angle ne dépend en aucune ſorte de la grandeur ou de la petiteſſe de ſes côtés. Car l'Angle n'étant que l'ouverture de deux Lignes qui ſe réuniſſent en un Point, il eſt tout formé par les premiers Points, qui, joints au Sommet Point commun, commençent deux Directions. Que ces deux Directions ſoient plus ou moins prolongées, elles n'en ſeront ni plus ni moins perpendiculaires, ni plus ni moins obliques l'une à l'égard de l'autre. Il eſt donc indifférent de donner plus ou moins d'étendue au Raïon de l'Arc, qui, du Sommet pris pour Centre, ſera tracé entre les côtés.

Pour rendre cette raiſon encore plus ſenſible, ſuppoſons pluſieurs Circonférences concentriques, c'eſt-à-dire, des Circonférences inégales en grandeur, mais décrites du même Centre. Que l'on diviſe par des Raïons la plus grande Circonférence en tel nombre d'Arcs que l'on jugera à propos, par exemple, en quatre Arcs égaux par deux Diamétres perpendiculaires : il eſt évident que les deux Diamétres partagent également en quatre Arcs égaux les petites Circonférences concentriques ; & que tous ces Arcs de 90 Degrés chacun, ſont auſſi propres les uns que les autres à meſurer par exemple l'Angle droit ACB. Fig. 35.



§. IV.

MESURE DES ANGLES

Qui n'ont pas leur Sommet dans le Centre du Cercle.

LOrſqu'un Angle eſt formé par deux Raïons, on n'eſt pas en peine de ſa meſure : l'Arc qui le borne détermine ſa grandeur. Mais on peut faire dans le Cercle pluſieurs Angles, qui n'ayent pas le Centre pour Sommet, tels que ceux qui ſeroient formés par deux Cordes, ou par une Corde & une Tangente, ou enfin par deux Sécantes intérieures ou extérieures ; & l'on demande ſi l'Arc ſur lequel ils s'appuyent, peut ſervir à les meſurer.

Il eſt certain que cet Arc, meſure naturelle de l'Angle dont le Sommet eſt au Centre, eſt trop grand ou trop petit pour déterminer la grandeur des autres Angles dont le Sommet ſeroit ailleurs que dans le Centre du Cercle. Car ces Angles ſont plus grands ou plus petits, que l'Angle du Centre qui s'appuyeroit ſur le même Arc. Il ſembleroit donc que l'Arc compris entre leurs côtés ne pourroit ſervir à les faire connoître. Eh pourquoi, ajouteroit-on, ſe donner la peine de chercher leur grandeur dans un Cercle, où ils ſont étrangers en quelque façon ? Ne peut-on pas aiſément la découvrir en décrivant de leur Sommet pris pour Centre des Arcs qui les meſureront exactement ?

Tels

Tels ſont les raiſonnemens que la pareſſe ſuggere. Mais les Géométres ne ſont pas ſujets à ce défaut. Ils ont voulu trouver dans le Cercle même, où ces Angles ſont contenus, de quoi fixer leur valeur. Le ſuccès a couronné leur entrepriſe; & leur découverte qui ſembloit d'abord ne ſatisfaire que la curioſité, s'eſt trouvée par la ſuite d'un uſage très-étendu. Suivons-les dans cet examen. Si la lumiere de l'évidence, qui nous a guidés juſqu'à préſent, paroît un peu nous abandonner ici, la certitude nous en dédommagera.

Angles à la Circonférence formés par deux Cordes. Fig. 36.

Conſidérons d'abord les Angles, qui, formés par deux Cordes, ont leur Sommet dans la Circonférence du Cercle. On a trouvé qu'*ils ont pour meſure la moitié de l'Arc ſur lequel ils s'appuyent*; & par conſéquent, que l'*Angle au Centre qui s'appuyeroit ſur le même Arc, ſeroit double de l'Angle à la Circonférence.*

Mais en vain, pour nous convaincre de cette vérité, tâcherions-nous d'approfondir la nature de l'Angle & de l'Arc qui le borne. La comparaiſon que nous pourrions faire des deux Angles, ne nous apprendroit que la ſupériorité de l'Angle au Centre, ſur l'Angle à la Circonférence. Car les côtés de l'Angle ADB, quoique beaucoup plus longs que ceux de l'Angle ACB, n'ont cependant que la même ouverture en AB. Donc l'écartement des côtés eſt, au ſortir du Sommet, plus conſidérable dans l'Angle au Centre, que dans l'Angle à la Circonférence. Mais cette ſupériorité du premier ſur le dernier eſt-elle du double? L'Arc AB trop grand pour meſurer

exactement l'Angle ADB, suffiroit-il pour en mesurer encore un autre de la même grandeur? C'est ce que la seule inspection des deux Angles ne nous apprendra jamais parfaitement. Il faut donc avoir recours à des Angles subsidiaires, qui comparés avec nos Angles, nous en donnent le rapport précis.

LIV. I. CHAP. II. §. IV.

Si du Point D pris pour Centre, & de l'intervalle DA ou DB, je trace un Arc ponctué compris entre les côtés de l'Angle ADB, cet Arc qui mesure l'Angle à la Circonférence, doit avoir une Courbure moins forte que l'Arc de l'Angle au Centre, puisqu'il fait partie d'un plus grand Cercle. Il ne seroit donc pas impossible que l'Arc AB contint une fois plus de Degrès dans son Cercle, que l'Arc ponctué dans le sien. Mais il seroit difficile de le prouver d'une maniere géométrique, quoique dans la pratique il fut aisé de le vérifier.

J'en dis presque autant d'une autre méthode, qui paroît d'abord fort naturelle; la voici.

Si du Point D pris pour Centre, & de l'intervalle DC, on décrit un Arc compris entre les côtés de l'Angle ADB, ce petit Arc *ab* sera la véritable mesure de notre Angle. Or cet Arc *ab* a la même Courbure que le grand AB, puisqu'ils ont le même Raïon DC ou CA. Ainsi ces deux Arcs, appartenans à Cercles égaux, paroissent de nature à pouvoir être aisément comparés.

Je remarque en effet, que le petit Arc *ab* est également éloigné du Sommet D, & de l'Arc AB sur lequel les côtés prolongés de l'Angle *a*D*b*

s'appuyent. Il sembleroit donc que deux Lignes partant de A & B doivent former un Angle deux fois plus grand en allant se réunir en C moitié chemin, que s'ils alloient se réunir en D, aussi éloigné de C, que C l'est de l'Arc AB. Par conséquent, l'Angle au Centre seroit double de l'Angle à la Circonférence ; & l'Arc AB, mesure du premier, seroit double de l'Arc *ab*, mesure du second. Mais quoiqu'on puisse aisément justifier ce raisonnement dans la pratique, il faut néanmoins convenir qu'il est trop vague, & peu propre à porter l'évidence dans l'esprit.

Pour prouver géométriquement que l'Arc AB est double de *ab*, il faudroit établir auparavant, que lorsque deux Cercles égaux ont leurs Centres dans la Circonférence l'un de l'autre, ils se coupent mutuellement le tiers de leurs Circonférences. Car de-là il suivroit, que la partie *EaCbF* de la Circonférence ponctuée, étant égale à l'Arc EDF, ne seroit que moitié du grand Arc EABF. Par conséquent, tout Angle partant du Point D Centre du Cercle ponctué, & aboutissant à la concavité de l'autre Cercle, doit y couper un Arc double de celui qu'il a coupé dans la Circonférence ponctuée. Si du Point D l'on tiroit deux Lignes aux deux Points de Section E, F des deux Cercles, l'Angle EDF formé par ces deux Lignes auroit pour mesure la partie *EaCbF* de la Circonférence ponctuée ; & par conséquent la moitié de l'Arc EABF double de *EaCbF*. Or tous les Angles dont le Sommet seroit en D, & qui aboutiroient à la concavité du premier Cercle, sont compris dans la capacité

de l'Angle EDF. Donc chacun de ces Angles auroit pour mesure, ou bien la partie de la Circonférence ponctuée qu'il coupe, ou bien la moitié de l'Arc sur lequel il s'appuye dans le premier Cercle non ponctué.

Mais pour prouver la Proposition d'où ces conséquences dérivent, il faudroit d'autres principes que ceux que nous avons établis jusqu'à présent. Renonçons donc à ces méthodes trop compliquées, & renfermons-nous dans ce que nous sçavons déja de la nature des Angles, & de la situation réciproque des Lignes droites les unes à l'égard des autres.

Fig. 37. JE suppose que l'Angle ADB ait un de ses côtés DA passant par le Centre du Cercle, c'est-à-dire, que des deux Cordes qui le forment, l'une soit un Diamétre. Je demande seulement qu'on tire un second Diamétre EF, de maniere qu'il soit parallele à la Corde DB second côté de l'Angle.

On s'apperçoit d'abord que la Parallele EF coupe l'Arc AB en deux parties égales. Car l'Arc FB compris dans l'espace parallele est égal à l'Arc ED du même Cercle compris dans le même espace, comme on l'a prouvé dans le §. II. Or l'Arc ED est égal à l'Arc AF, autre partie de l'Arc total AB. Car les deux Diamétres qui se coupent forment deux Angles au Centre, opposés par le Sommet, & par conséquent égaux, lesquels ont pour mesure l'Arc sur lequel ils s'appuyent. L'Arc ED déja égal à FB, l'est donc aussi à AF : donc AF est égal à FB : donc l'Arc AB

est divisé en deux parties égales par la Parallele EF.

D'un autre côté la Parallele, en coupant le premier Diamétre en C, donne un Angle au Centre ACF, qui a pour mesure l'Arc AF, moitié de AB. Si donc cet Angle ACF étoit égal à l'Angle à la Circonférence ADB, il seroit manifeste que ce dernier auroit pour mesure la moitié de l'Arc AB sur lequel il s'appuye. Or l'égalité des deux Angles saute aux yeux. Car l'Angle ACF est externe à l'espace parallele, & par conséquent égal à son opposé intérieur ADB, ainsi qu'on l'a prouvé ci-dessus Chap. I. §. II. De plus, l'Angle ACF est égal à l'Angle ECD qui lui est opposé par le Sommet; & celui-ci est alterne, & par conséquent égal à l'Angle ADB. Donc l'Angle à la Circonférence ADB est égal à l'Angle au Centre ACF. Donc le premier a pour mesure l'Arc AF moitié de l'Arc sur lequel il s'appuye. C'est ce qu'il falloit démontrer.

Après nous être assurés de la mesure des Angles à la Circonférence dont l'un des côtés est un Diamétre, il ne sera pas difficile de nous convaincre que tous les Angles de cette espéce, formés par deux simples Cordes, n'ont pas une mesure différente.

Car ou bien le Centre du Cercle se trouvera entre les deux Cordes; ou bien il sera en-dehors. Fig. 38.

Dans le premier cas, du Sommet D de l'Angle tirez le Diamétre DE: l'Angle ADB sera partagé en deux Angles, qui pris ensemble sont égaux à l'Angle total. Or chacun des petits Angles ayant le Diamétre pour un de ses côtés, a

Liv. I. Chap. II. §. IV.

pour mesure la moitié de l'Arc sur lequel il s'appuye. Donc l'Angle total a pour mesure la moitié de l'Arc AB, composé des deux Arcs AE, EB.

Fig. 39.

Dans le second cas, si du Sommet D on tire le Diamétre DE, on a trois Angles à la Circonférence, sçavoir, l'Angle total EDB, & deux autres Angles EDA, ADB, qui pris ensemble, sont égaux à l'Angle total. L'Angle total EDA ayant le Diamétre pour un de ses côtés, a pour mesure la moitié de l'Arc total EAB. Par la même raison l'Angle EDA a pour mesure la moitié de l'Arc EA. Donc l'Angle ADB, reste de l'Angle total, a pour mesure la moitié de l'Arc AB, reste de l'Arc total.

On exprime autrement la proposition générale, en disant, que l'*Angle au Centre est double de l'Angle à la Circonférence* : & cela est exact toutes les fois que l'Angle au Centre peut s'appuyer sur le même Arc que l'Angle à la Circonférence. Mais cela ne peut avoir lieu, que dans le cas où celui-ci s'appuye sur un Arc moindre que la demi-Circonférence. Car s'il s'appuyoit sur une demi-Circonférence entiere, les deux Lignes tirées du Centre aux deux Points où cet Angle aboutit, seroient un Diamétre, & non pas un Angle. A plus forte raison l'Angle au Centre ne pourroit-il s'appuyer sur un Arc plus grand que la demi-Circonférence.

Il suit 1°, que *tous les Angles à la Circonférence, qui s'appuyent sur un Arc moindre que la demi-Circonférence, sont toujours aigus* ; puisque la moitié de cet Arc n'a pas 90 Degrés.

2°. Que *tous ceux qui s'appuyent sur une demi-Circonférence, sont droits.*

3°. Que *ceux qui s'appuyent sur un Arc plus grand que la demi-Circonférence, sont obtus.*

En supposant l'Arc AB, quel qu'il soit, retranché par une Corde, le Cercle se trouve partagé en deux *Segmens.* (Car c'est ainsi que l'on nomme une portion quelconque de Cercle terminée par un Arc & par une Corde) Si la Corde est un Diamétre, les deux Segmens sont des demi-Cercles. Mais si ce n'est qu'une simple Corde, le Cercle est partagé en deux Segmens inégaux, l'un plus grand, & l'autre plus petit que le demi-Cercle. Fig. 40. 41. 42.

Les Géométres se servent souvent de cette division du Cercle en Segmens pour exprimer les conclusions précédentes. Ils disent, que l'Angle à la Circonférence dans le grand Segment est toujours aigu; qu'il est toujours obtus dans le petit Segment; & toujours droit dans le demi-Cercle.

Mais il faut encore remarquer avec soin, que si l'on plaçoit des Sommets d'Angles dans tous les Points de l'Arc, soit du grand Segment, soit du petit, soit du demi-Cercle, tous ces Angles seroient également aigus, ou également obtus dans chaque Segment, & tous Angles droits dans le demi-Cercle. Et c'est ce qui démontre la grande utilité de cette maniere de mesurer les Angles à la Circonférence. Car il se trouve quelquefois dans un Segment de Cercle une multitude de ces Angles qui paroissent si différens les uns des autres, qu'on ne seroit pas tenté de

Liv. I. Chap. I. §. IV.

les comparer ensemble; & qui néanmoins sont égaux, parcequ'ils s'appuyent tous sur le même Arc. La Rectitude de tous ces Angles dans le demi-Cercle est d'un usage encore plus étendu. Les autres Segmens donnent des Angles aïgus ou obtus égaux, sans déterminer leur valeur précise. Le demi-Cercle détermine l'Angle droit, en quelque Point de la Circonférence que le Sommet soit placé.

Angles formés par une Corde & une Tangente. Fig. 43.

Après avoir reconnu la vraie mesure de l'Angle formé par deux Cordes, il ne sera pas difficile de trouver celle de l'Angle qui seroit formé par une Corde & par une Tangente. Les Géométres l'appellent l'*Angle du Segment.*

Cet Angle a aussi son Sommet D dans la Circonférence; mais ses deux côtés, au lieu de s'appuyer sur un Arc, en renferment un entr'eux.

La propriété de cet Angle est d'*avoir pour mesure la moitié de l'Arc renfermé entre ses côtés.*

Pour le prouver, supposons d'abord que la Corde soit un Diamétre DE. L'Angle formé par le Diamétre & la Tangente est droit, puisque le Diamétre est perpendiculaire sur la Tangente. Cet Angle a donc pour mesure la moitié de l'Arc DAE, qui est une demi-Circonférence.

Supposons maintenant que la Corde qui fait Angle avec la Tangente, soit une simple Corde DA. Si l'on tire encore le Diamétre DE, l'on aura l'Angle total EDB, & les deux Angles quelconques EDA, ADB, compris dans l'Angle total.

Or cet Angle total a pour mesure la moitié de l'Arc total EAD. D'ailleurs l'Angle à la Circon-

férence EDA a pour mesure la moitié de l'Arc EA sur lequel il s'appuye. Donc l'Angle ADB, reste de l'Angle total, a pour mesure la moitié de l'Arc AD renfermé entre ses côtés & reste de l'Arc total.

Angles formés par des Sécantes.

IL ne nous reste plus qu'un mot à dire sur les Angles formés par deux Sécantes, soit intérieures, soit extérieures. Les Géométres ont eu aussi la curiosité d'en chercher la mesure dans des Arcs du Cercle où ils sont placés.

1. Soit un Angle ADB dont le Sommet est au-dessus du Centre & au-dessous de la Circonférence, & dont les côtés soient des Sécantes intérieures DA, DB. Il est évident que cet Angle est plus petit que l'Angle au Centre, & plus grand que l'Angle à la Circonférence, qui s'appuyeroient sur le même Arc. Cet Angle n'a donc pas pour mesure tout l'Arc AB; mais aussi il en a plus de la moitié. Les Géométres ont trouvé qu'il falloit prendre, pour supplément de sa mesure, la moitié de l'Arc EF coupé dans le haut de la Circonférence par le prolongement des côtés AD, BD. Fig. 44.

2. Si les deux Sécantes intérieures ont leur Sommet au-dessous du Centre, il est évident que l'Angle qu'elles forment est plus grand que l'Angle au Centre. L'Arc AB ne suffit donc pas pour le mesurer; & l'on a trouvé qu'en prenant la moitié de cet Arc AB, il falloit y joindre la moitié de l'Arc EF coupé, dans le haut de la Circonférence, par le prolongement de ses côtés. Fig. 45.

3. Il est évident encore, qu'un Angle ADB Fig. 46.

LIV. I. CHAP. I. §. IV.

formé hors du Cercle par deux Sécantes extérieures qui coupent sa Surface convexe, pour venir s'appuyer sur sa concavité, est plus petit qu'un Angle à la Circonférence qui s'appuyeroit sur le même Arc AB. Cet Angle n'a donc pas pour mesure la moitié entiere de l'Arc AB : il en faut retrancher la moitié de l'Arc EF coupé dans la partie supérieure du Cercle par les deux côtés DA, DB. L'on dit donc que cet Angle a pour mesure la moitié de l'Arc sur lequel il s'appuye, moins la moitié de celui qu'il coupe en entrant dans le Cercle.

Ces trois Propositions sont tout-à-fait dans l'analogie de ce que nous avons établi sur la nature des Angles à la Circonférence. Mais on ne peut les démontrer en rigueur qu'au moyen des propriétés du Triangle, dont on va traiter dans le Livre suivant.

D'ailleurs les Angles formés par des Sécantes ne sont d'aucun usage dans la Géométrie. En effet, à quoi pourroient servir des mesures aussi peu naturelles, qu'il faut prendre dans des Arcs différens du même Cercle. Cet objet n'étant donc que de pure curiosité, nous n'en parlerons pas davantage; & nous passerons tout de suite à la considération des Figures planes toutes formées.

Fin du premier Livre.

GÉOMÉTRIE MÉTAPHYSIQUE.

LIVRE SECOND.

LES FIGURES PLANES.

LE premier Livre de cet Ouvrage nous a mis ſous les yeux les matériaux des Surfaces ou Figures planes. Nous avons même vu le commencement de leur formation dans les Angles, qui nous préſentent une portion d'étendue terminée de deux côtés. En fixant la longueur des jambes, & joignant leurs extrémités par d'autres Lignes, on les ſépareroit de tous les eſpaces environnans. C'eſt cette étendue bornée de toutes parts par un certain nombre de Lignes, qui va faire l'objet de nos recherches.

Le nombre de Lignes employées à former une enceinte peut varier à l'infini. Un Angle étant donné, il eſt facile de clôre l'eſpace par une ſeule Ligne droite. Mais au lieu de trois Lignes, on peut en mettre quatre, cinq, vingt, &c. & c'eſt la quantité de ces Lignes, & la différence des Angles qu'elles forment par leur union, qui conſtituent les diverſes eſpeces de Figures.

LIV. II. On voit d'abord, sans qu'il soit besoin de le prouver, que toute Figure plane a nécessairement autant d'Angles que de côtés. Car chacun de ces côtés étant joint à deux autres, participe à la formation de deux Angles. Ainsi une Figure de trois côtés, a trois Angles : une de quatre, de cinq, de six côtés, a quatre, cinq, six Angles, &c.

C'est sur ce fondement que l'on se contente de désigner les Figures planes par leurs Angles. On leur donne à toutes le nom général de *Polygônes* ; & le nom de chaque espece est tiré du nombre des Angles. Le *Triangle* a trois côtés : le *Tétragône* ou *Quadrilatere*, en a quatre : le *Pentagône*, cinq : l'*Exagône*, six : l'*Eptagône*, sept : l'*Octogône*, huit : l'*Ennéagône*, neuf : le *Décagône*, dix : l'*Endécagône*, onze : le *Dodécagône*, douze. On ne donne pas de nom particulier à la plûpart des Polygônes qui ont plus de douze côtés.

Cette premiere notion des Figures planes nous présente deux points de vûe différens, sous lesquels on peut les considérer : sçavoir, leur *Quantité* & leur *Qualité*.

La *Quantité* d'une Figure est la portion d'étendue renfermée dans ses bornes : sa *Qualité* est la forme de son Contour ou *Périmétre*.

La *Quantité* d'une Figure plane dépend de la longueur plus ou moins grande de ses côtés : la *Qualité* dépend du nombre des côtés & des Angles.

La *Quantité* fait qu'une Figure plane est plus ou moins grande : c'est la *Qualité* qui constitue les especes.

Deux Figures égales en *Quantité* peuvent différer selon la *Qualité* : un Cercle, par exemple, & un Quarré. Et deux Figures de la même *Qualité*, peuvent différer en *Quantité* : par exemple, un grand & un petit Triangle.

Cette double vûe que l'on ne peut embrasser tout à la fois, nous oblige de diviser ce Livre en plusieurs Sections.

Dans la premiere, nous considérerons les Figures planes par leur *Qualité*, c'est-à-dire, par rapport à leur contour, au nombre de côtés qui les terminent, aux Angles formés par les Lignes environnantes.

Dans la seconde Section, nous considérerons les Figures par leur *Quantité*, c'est-à-dire, par rapport à l'étendue qu'elles renferment ; & nous tâcherons d'établir des régles sures, pour découvrir & déterminer cette *Quantité*.

Enfin, comme les Figures planes peuvent être parfaitement semblables par leur *Qualité*, sans être pour cela de la même grandeur, nous considérerons ces rapports de similitude, tant à l'égard du *Périmétre* de ces Figures, qu'à l'égard de l'espace qu'elles contiennent. Ce sera la matiere d'une troisiéme Section.



PREMIERE SECTION.

LES FIGURES PLANES,
Considérées selon leur Périmétre.

CHAPITRE PREMIER.

LE TRIANGLE.

DE toutes les Figures planes, le Triangle est la plus simple. Il faut au moins trois Lignes droites pour former une enceinte; mais trois suffisent. Une Ligne droite, en unissant les extrémités des jambes d'un Angle, forme avec elles deux Angles nouveaux.

Cette Figure si simple est en même tems la plus féconde, & celle qu'il importe le plus de bien connoître; parcequ'elle entre dans la composition de toutes les autres, & qu'elle en est pour ainsi dire l'Elément.

§. I.

DU TRIANGLE EN GENERAL.

ON remarque dans un Triangle les Côtés, les Angles, la Base, le Sommet & la Hauteur.

La *Base* d'un Triangle, est le Côté inférieur

sur lequel on le conçoit appuyé. Mais comme, en tournant la Figure, chacun des Côtés peut devenir l'inférieur, tous sont également propres à servir de Base. On prend néanmoins pour Base le plus grand Côté, lorsqu'on n'a pas de raison d'en prendre un autre.

Le *Sommet*, est la Pointe de l'Angle opposé à la Base.

La *Hauteur*, est une Perpendiculaire abbaissée du Sommet sur la Base, prolongée s'il en est besoin.

La premiere inspection du Triangle nous découvre d'abord, que *le plus grand Côté est toujours opposé au plus grand Angle; le plus petit, au plus petit Angle; & les Côtés égaux, aux Angles égaux.*

En effet, les deux Côtés d'un Angle étant déterminés d'une Longueur quelconque, il est évident qu'ils seront plus ou moins écartés, à proportion que l'Angle sera plus ou moins grand. Or plus ils seront écartés, & plus la Ligne qui joint leurs extrémités doit avoir de Longueur. On fera le même raisonnement en comparant l'un après l'autre ces deux premiers Côtés avec le troisiéme qui les unit. Donc le plus grand Côté est opposé au plus grand Angle, &c. Fig. 1.

La longueur des Lignes qui terminent un Triangle peut varier à l'infini. Mais comme la grandeur de l'Angle est indépendante de celle des Côtés, il est évident que *les Angles d'un Triangle quelconque peuvent être égaux à ceux d'un plus grand ou d'un plus petit.*

Liv. II. I. Sect. Chap. I. §. I.

Ces deux premieres vérités ſur la nature du Triangle en général, ont fait ſoupçonner que l'on pourroit découvrir la valeur, non de chaque Angle particulier dont la grandeur peut varier ſans fin, mais des trois Angles pris enſemble: & comme l'Angle droit eſt le ſeul dont la grandeur ſoit fixe & déterminée, on a recherché s'il y auroit un rapport conſtant entre les trois Angles de quelque Triangle que ce ſoit, & un certain nombre d'Angles droits.

Fig. 1.

Pour trouver ce rapport; rappellons-nous que les trois Sommets d'un Triangle n'étant pas rangés en Ligne droite, on y peut toujours faire paſſer une Circonférence de Cercle, à l'égard de laquelle les trois Côtés du Triangle ſeront des Cordes. Et comme ces trois Cordes ſe joignent par leurs extrémités, il eſt évident que les trois Arcs qu'elles ſoutiennent, pris enſemble, ſont toute la Circonférence du Cercle circonſcrit.

Les trois Angles de tout Triangle ſont par conſéquent des Angles à la Circonférence, dont chacun a pour meſure la moitié de l'Arc ſur lequel il s'appuye. Donc les trois Angles pris enſemble ont pour meſure la moitié de la Circonférence. Or la moitié de la Circonférence eſt la meſure conſtante de deux Angles droits. Donc *les trois Angles de tout Triangle ſont égaux à deux Angles droits.*

Comme nous venons de nous occuper de la meſure des Angles formés par des Cordes, cette preuve a dû ſe préſenter la premiere à notre eſprit. Nous verrons d'ailleurs par la ſuite, qu'il

eſt

eſt très-important de conſidérer ſouvent le Triangle comme inſcrit dans le Cercle. Or cette poſition du Triangle fait toucher au doigt l'égalité de ſes trois Angles à deux Angles droits. Voyons néanmoins ſi nous ne pourrions pas arriver à cette importante vérité par une voie encore plus naturelle.

En jettant les yeux ſur un Triangle quelconque, & prenant pour ſa Baſe celui de ſes Côtés que l'on voudra, on voit que les deux autres qui s'appuyent ſur cette Baſe, partent néceſſairement d'un même Point A; & nous avons vu que les Lignes qui partent d'un même Point, ont les mêmes propriétés que celles qui traverſent un eſpace parallele. Rien n'eſt donc plus ſimple que de conſidérer tout Triangle comme enfermé dans un eſpace parallele, au moyen d'une Ligne DE parallele à ſa Baſe, que l'on peut tirer ou ſuppoſer. Fig. 2.

Les deux côtés du Triangle forment ſur cette Parallele trois Angles de ſuite, dont le Sommet commun eſt en A; & l'on ſçait que ces trois Angles ſont égaux à deux droits. Il ne s'agit donc plus que de comparer ces trois Angles avec les trois du Triangle.

Or l'égalité des trois Angles de ſuite & des trois du Triangle eſt manifeſte. 1°. L'Angle BAC qui eſt au milieu des Angles de ſuite, eſt auſſi l'un des Angles du Triangle. 2°. L'Angle EAC formé ſur la Parallele ſupérieure par la Ligne AC eſt égal à ſon Alterne ACB formé ſur la Parallele inférieure par la même Ligne AC. 3°. L'Angle DAB, dernier des Angles de ſuite,

est aussi Alterne de l'Angle ABC, dernier du Triangle. Donc les trois Angles du Triangle sont égaux aux trois Angles de suite : donc ils sont égaux à deux droits.

Pour nous confirmer de plus en plus dans cette découverte & nous la rendre plus familiere, essayons d'y parvenir par la construction même de la Figure.

Fig. 3. Ayant la Ligne horizontale AB, j'éleve sur cette Ligne au Point D, par exemple, une Ligne DC ou perpendiculaire ou avec une inclinaison quelconque. Je prends ensuite sur la même horizontale AB, un Point pris à l'aventure, F par exemple. Pour achever le Triangle, il ne s'agit que de tirer une troisiéme Ligne de F en C; & ce Triangle ainsi tracé sans aucune condition, me représente tous les Triangles possibles.

Mais au lieu de terminer tout d'un coup le Triangle, il me vient dans l'esprit d'élever au Point F sur l'horizontale une Ligne FE parallele à la Ligne DC. Au moyen du Parallélisme, les Angles internes formés sur l'horizontale par la chute de ces deux Lignes, sont égaux à deux droits.

Maintenant pour transformer ces deux Paralleles en Côtés d'un Triangle dont DF soit la Base, je n'ai qu'à prendre l'une des deux Paralleles, EF par exemple, & la faisant mouvoir sur le Point F comme sur un pivot, l'approcher par E de la Ligne CD, jusqu'à ce que quelqu'un de ses Points comme E se confonde avec le Point C. Voilà le Triangle formé.

Dans ce mouvement de la Ligne EF, l'Angle

EFD a souffert beaucoup de diminution, puisqu'il se trouve réduit à l'Angle CFD. Les deux Angles sur la Base du Triangle sont donc moindres que deux Angles droits : il s'en faut précisément l'Angle retranché EFC.

Mais si j'ai perdu ce dernier Angle, j'en ai acquis un autre par l'union de la Ligne EF avec la Ligne CD, sçavoir, l'Angle DCF troisiéme Angle du Triangle nouvellement formé. Donc si ce troisiéme Angle donne précisément ce que l'on a perdu par le retranchement de l'Angle EFC, les trois Angles du Triangle seront égaux à deux droits. Or l'égalité de ces deux Angles saute aux yeux, puisqu'ils sont Alternes entre les Paralleles CD, EF. Donc *les trois Angles du Triangle sont égaux à deux droits.*

La vérité de cette Proposition fondamentale dans la Géométrie méritoit d'être établie sur plus d'une preuve.

Il suit de-là 1°. que *si l'on connoît deux Angles dans un Triangle, le troisiéme sera connu.* Car les trois ensemble ont pour mesure une demi-Circonférence de Cercle, c'est-à-dire, 180 Degrés. Par conséquent les deux Angles connus étant d'un nombre quelconque de Degrés au-dessous de 180, ce qu'il faudra de Degrés pour completter 180. sera la mesure de l'Angle inconnu.

2°. Que *si deux Angles d'un Triangle sont égaux à deux Angles d'un autre Triangle,* (soit que cette égalité soit d'Angle à Angle, soit qu'elle se trouve seulement entre la somme des deux Angles de part & d'autre) *le troisiéme Angle du premier Triangle sera égal au troisiéme Angle*

Liv. II. I. Sect. Chap. I. §. I.

du second. La raison est la même que celle du précédent Corollaire.

3°. *Un Triangle ne peut avoir qu'un Angle droit.* Car s'il en avoit deux, la valeur des trois Angles excéderoit celle de deux Angles droits. Par la même raison, un Triangle ne peut avoir qu'un Angle obtus. Mais les trois peuvent être aigus.

4°. *Si un Triangle a un Angle droit, les deux autres valent un droit :* si ces deux autres sont égaux, ils seront chacun de 45 Degrés ; & *s'ils* sont inégaux, il suffira d'en connoître un pour connoître l'autre.

Fig. 4. 5°. *Si l'on prolonge un des Côtés du Triangle, l'Angle extérieur D formé par ce prolongement, est égal aux deux intérieurs opposés A & B.* Car cet Angle D fait avec son voisin C deux Angles de suite égaux à deux droits. Or les Angles A & B joints à l'Angle C sont de même égaux à deux droits. Donc, &c.

On doit dire la même chose des deux autres Angles extérieurs E & F formés par le prolongement des deux autres Côtés du Triangle.

6°. *Ces trois Angles extérieurs du Triangle sont égaux à quatre droits.* Car chacun d'eux avec l'Angle intérieur qui l'avoisine, égale deux droits ; ce qui répété trois fois, fait la valeur de six Angles droits : d'où retranchant deux pour la valeur des trois intérieurs, il en reste quatre pour les trois extérieurs.

§. II.

DES DIVERSES ESPECES DE TRIANGLES.

LE Triangle peut-être considéré, ou selon ses Côtés, ou selon ses Angles. Six especes de Triangles.

Considéré selon ses Côtés, ou bien les trois Côtés sont égaux; ou deux seulement; ou les trois sont d'inégale longueur. Dans le premier cas, le Triangle est *équilatéral*; dans le second, *isocelle*: dans le troisiéme, *scaléne*.

Si l'on considére le Triangle selon ses Angles, comme les trois pris ensemble sont égaux à deux droits, il faut qu'il ait un Angle droit & deux aigus: ou bien un Angle obtus & deux aigus: ou bien enfin trois Angles aigus. Dans le premier cas, il est *rectangle*: dans le second, *obtus-angle*: dans le troisiéme, *acutangle*.

Il est impossible d'imaginer un Triangle qui n'appartienne pas à quelqu'une de ces six especes. Nous allons en parcourir les propriétés.

I.

I. Triangle équilatéral. Fig. 5.

LE *Triangle équilatéral est nécessairement équiangle*, c'est-à-dire, que ses trois Angles sont égaux; puisque chacun d'eux est opposé à un Côté égal. Par conséquent *tout Triangle équiangle est aussi équilatéral.*

D'ailleurs prenant BC pour Base, les Côtés AB, AC Lignes égales partant d'un même Point, sont également inclinées sur la Base BC. Donc elles forment les mêmes Angles en sens diffé-

Liv. II. I. Sect. Chap. I. §. II.

rent. En prenant pour Base le Côté AB ou AC; on prouvera par la même voie que l'Angle en A est égal à l'Angle en B ou à l'Angle en C.

Enfin, en supposant le Triangle équilatéral inscrit dans un Cercle, la Circonférence se trouvera partagée en trois Arcs égaux par trois Cordes égales. Donc chaque Angle a pour mesure la moitié du tiers ou la sixiéme partie de la Circonférence. Ce qui montre que l'Angle d'un Triangle équilatéral ou équiangle est toujours de 60 Degrés.

On voit par-là que le Triangle équilatéral est une Figure parfaitement réguliere. Car c'est ainsi qu'on nomme toute Figure dont les Angles & les Côtés sont parfaitement égaux.

2.

Si du Sommet du Triangle équilatéral, on abbaisse une Perpendiculaire sur la Base, elle coupera cette Base en deux parties égales.

Car les deux Côtés AB, AC, étant égaux & également inclinés sur la Base, doivent être également éloignés du Point D, où tombe la Perpendiculaire.

De plus, *cette Perpendiculaire partage l'Angle du Sommet en deux Angles égaux.* Car les deux Côtés AB, AC étant également inclinés sur la Base, s'éloignent également de la route perpendiculaire. Donc l'Angle BAD égale l'Angle DAC.

2. Triangle isocelle. Fig. 6.

DAns le Triangle isocelle on prend pour Base le Côté inégal; soit que ce soit le plus grand ou le plus petit.

Il est évident que *les deux Angles sur la Base sont égaux dans ce Triangle*. Car ils sont opposés à des Côtés égaux : & d'ailleurs les deux Côtés égaux, partant du même Point A, sont également inclinés sur la Base, & par conséquent y font des Angles égaux.

LIV. IV. I. SECT. CHAP. I. S. II.

Mais la grandeur de ces Angles n'est point constante, parceque l'Angle du Sommet peut varier à l'infini. Tout ce que l'on peut dire, c'est que ce dernier Angle étant connu, on a la valeur des deux autres. Car les trois ensemble ayant 180 Degrés pour mesure, on n'a qu'à retrancher de cette somme la valeur de l'Angle du Sommet, les deux Angles de la Base partageront également le restant des Degrés.

Il est encore évident que *la Perpendiculaire tirée du Sommet du Triangle isocelle sur la Base, tient le milieu précis entre les deux obliques, & partage en deux parties égales & la Base & l'Angle du Sommet.*

On voit par-là que le Triangle isocelle tient beaucoup de l'Equilatéral; ou plutôt, que celui-ci est *l'Isocelle* par excellence, puisqu'il est *Isocelle* de toutes parts, au lieu que le Triangle auquel on donne ce nom, n'est *Isocelle* que de deux côtés.

3. Triangle Scalène. Fig. 1.

LE Triangle *scalène* ne nous offre aucune propriété particuliere, & ne peut avoir que les attributs généraux du Triangle, parceque l'inégalité de ses Angles & de ses Côtés n'a rien de fixe & de constant.

LIV. II. I. SECT. CHAP. I. §. II.

4. Triangle Rectangle.

LOrſqu'on conſidere le Triangle *rectangle* comme *rectangle*, on prend toujours pour le Sommet la Pointe de l'Angle droit, & pour Baſe le Côté oppoſé, c'eſt-à-dire, le grand Côté. Cette Baſe eſt connue ſous le nom d'*Hypothénuſe*.

I.

Fig. 7. *Le Triangle rectangle ne peut être Equilatéral ou Equiangle*. Car l'Angle droit, étant ſon plus grand Angle, eſt oppoſé au plus grand Côté; & les deux Angles de la Baſe, qui pris enſemble n'en valent qu'un droit, ſont néceſſairement plus petits.

Fig. 8. Mais ce Triangle peut être iſocelle ou ſcalène; parceque les Côtés qui forment l'Angle droit, & les deux Angles de la Baſe peuvent être égaux ou inégaux, ſans que le Triangle en ſoit moins rectangle.

2.

Le Centre du Cercle circonſcrit au Triangle rectangle eſt néceſſairement le Point-milieu de la Baſe ou Hypathénuſe.

Fig. 7. & 8. Car l'Angle droit, dont le Sommet eſt dans la Circonférence, s'appuye ſur une demi-Circonférence. Par conſéquent l'Hypothénuſe eſt Diamétre de ce Cercle. Or le Centre du Cercle eſt au milieu du Diamétre. Nous verrons dans la ſuite le merveilleux uſage que l'on fait de cette Figure.

5. Triangle Obtus-angle.

Fig. 9. & 10. SI le Triangle rectangle ne peut être équilatéral, à plus forte raiſon le Triangle obtus-angle. Mais il peut être iſocelle & ſcalène.

Le Centre d'un Cercle circonscrit au Triangle obtus-angle est nécessairement hors du Triangle, & au-dessous du grand Côté qui sert de Base.

Car l'Angle obtus dont le Sommet est dans la Circonférence, doit s'appuyer sur un Arc plus grand que la demi-Circonférence. Par conséquent sa Base est une Corde tirée au-dessus du Centre.

6. Triangle Acutangle.

LE Triangle acutangle peut être équilatéral, isocelle ou scalène.

I.

Le Centre du Cercle circonscrit à tout Triangle acutangle doit être dans l'intérieur du Triangle.

Car chaque Angle étant aigu, s'appuye sur un Arc moindre qu'une demi-Circonférence. Par conséquent chacune des trois Cordes, plus petite qu'un Diamétre, est au-dessus ou au-dessous du Centre. Donc le Centre se trouvera dans l'intérieur des trois Côtés du Triangle. Fig. 11.12. & 13.

2.

Si du Centre du Cercle circonscrit au Triangle acutangle-équilatéral, on abbaisse des Perpendiculaires sur chacun des trois Côtés, ces Perpendiculaires seront égales.

Car les Côtés du Triangle équilatéral sont des Cordes égales dans le Cercle circonscrit, & par conséquent également éloignées du Centre. Fig. 11.

3.

Si du Centre du Cercle circonscrit au Triangle acutangle-isocelle, on abbaisse des Perpendiculaires sur chacun des trois Côtés, celles qui tomberont sur les Côtés égaux seront égales. Car ces

deux Côtés sont des Cordes égales dans le Cercle circonscrit.

Liv. II. I. Sect. Chap. I. §. III. Fig. 12.

Mais *celle qui tombera sur le Côté inégal, sera plus longue ou plus courte que chacune des deux autres.* Car le Côté inégal est dans le Cercle circonscrit une Corde plus proche ou plus éloignée du Centre qu'aucun des deux autres Côtés.

4.

Enfin, *si le Triangle acutangle est scalène, les Perpendiculaires abbaissées du Centre sur chacun des Côtés, sont inégales.*

Fig. 13. Car les trois Côtés du Triangle scalène sont des Cordes inégales dans le Cercle circonscrit, & par conséquent inégalement éloignées du Centre.

---

§. III.

CONDITIONS NECESSAIRES *pour déterminer un Triangle.*

UN Triangle ayant trois Côtés & trois Angles, il est nécessaire pour constituer individuellement quelque Triangle que ce soit, que ces six choses soient déterminées. Mais il n'est pas besoin de les connoître toutes pour assigner la grandeur d'un Triangle; parceque quelques-unes étant données, les autres en sont une conséquence nécessaire. Il s'agit d'examiner quelles sont ces conditions essentielles.

I.

La fixation des trois Angles ne détermine pas la grandeur du Triangle.

Car la grandeur des Angles étant indépendante de la longueur de leurs jambes, il est très possible que des Triangles de grandeur differente à l'infini, ayent néanmoins les mêmes Angles. Si, par exemple, dans le Triangle ABC, on tire une Ligne DE parallele à la Base BC, on aura, outre le grand Triangle, un petit Triangle ADE. Or ces deux Triangles sont équiangles entr'eux. Car l'Angle en A est commun à l'un & à l'autre. 2°. Les Angles de la Base du petit sont externes à l'espace parallele formé par les Lignes DE, BC; & par conséquent chacun d'eux est égal à l'Angle interne opposé, l'Angle en D à l'Angle en B, & l'Angle en E à l'Angle en C. Donc les trois Angles des deux Triangles sont égaux respectivement. Fig. 14.

2.

Au contraire; *les trois Côtés du Triangle étant fixés, les Angles le sont aussi.*

Car le plus grand Angle est nécessairement opposé au plus grand Côté: le plus petit, au plus petit Côté; & les Angles égaux, aux Côtés égaux. Ces trois Angles pris ensemble ne peuvent excéder la valeur de deux droits. Donc la grandeur de chaque Angle est déterminée par la longueur du Côté opposé.

Soient donc les trois Lignes M, N, O données pour faire un Triangle (il faut supposer que deux de ces Lignes prises ensemble soient plus longues que la troisiéme) si l'on prend M Fig. 15.

pour Base égale à BC, & que du Point C & avec la Ligne N pour Raïon, on trace un Arc de Cercle au-dessus de BC, l'une des extrémités de la Ligne N étant fixée en C, l'autre extrémité est indifférente à s'arrêter dans quelque Point que ce soit de l'Arc tracé. Mais comme cette derniere extrémité de la Ligne N doit se joindre à l'extrémité de la Ligne O pour faire le Sommet du Triangle, il faut voir en quel Point de l'Arc le bout de la Ligne O rencontrera le bout de la Ligne N.

Pour cela du Point B & avec la longueur O prise pour Raïon, soit tracé un autre Arc : le Point A où les deux Arcs se coupent, est le seul où les Lignes N & O puissent se rencontrer. Donc avec les trois Lignes données on ne peut faire d'autre Triangle que le Triangle ABC : donc la fixation des trois Côtés du Triangle en détermine les Angles.

3.

Deux Côtés, & l'Angle compris entre ces Côtés, déterminent le Triangle.

Fig. 16. Car pour achever le Triangle, il ne s'agit plus que de tirer la Ligne BC de l'extrémité d'un Côté à l'extrémité de l'autre. Or il n'y a qu'une maniere de tracer cette Ligne, parcequ'on ne peut tirer qu'une seule Ligne droite d'un Point à un autre Point. Pour que cette Ligne fût plus ou moins longue, il faudroit que les Côtés AB, AC s'approchassent ou s'éloignassent, & par conséquent que l'Angle compris devint plus ou moins grand : ce qui seroit contre l'hypothèse.

4.

Deux Angles & un Côté déterminent le Triangle.

Soit le Côté BC, & les deux Angles donnés, marqués sur cette Ligne par deux Arcs de Cercles égaux tracés des Points B & C pris pour Centre. Il faut nécessairement que les deux autres Côtés, qui partiront de B & de C pour aller former le troisiéme Angle, passent par le dernier Point de l'Arc en B & de l'Arc en C. Leur route est tracée; leur inclinaison sur BC fixée. Ils s'éleveront donc jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au Point A; & la position de ce Point A ne peut varier: plus élevé, les Côtés seroient moins obliques: plus abbaissé, les Côtés seroient plus obliques; & par conséquent les Angles de la Base pourroient être plus grands ou plus petits: ce ce qui seroit contre la supposition. Fig. 17.

5.

Deux Côtés, & un Angle non compris entre ces Côtés, donnent au Triangle une double détermination.

Soient les Lignes M & N & l'Angle O. Soit AB égal à M. Du Point B pris pour Centre, soit décrit un Arc mesure d'un Angle égal à l'Angle O, & touchant d'un côté la Ligne AB. Fig. 18. & 19.

La Base du Triangle doit passer par l'autre extrémité de l'Arc. Mais comme la longueur de cette Base n'est pas spécifiée, tirons-la indéfiniment.

Enfin du Point A pris pour Centre, & avec la Ligne N prise pour Raïon, décrivons un

grand Arc. Cet Arc, en supposant la Ligne N assez longue pour parvenir jusqu'à la Base, la coupera en deux Points D & E. Ainsi, avec les conditions données, on auroit deux Triangles ABD, ABE fort différens l'un de l'autre. Dans le premier, le côté égal à N forme un Angle obtus sur une petite Base; & dans l'autre un Angle aigu sur une plus grande Base. Donc avec les conditions données, l'on aura une double détermination du Triangle. Pour en fixer absolument la grandeur, il faut ajouter que le second Angle de la Base soit obtus ou aigu.

De toutes ces Propositions il suit, que pour connoître que deux Triangles ou un plus grand nombre sont parfaitement égaux, il suffit de sçavoir qu'ils ont les mêmes conditions déterminantes, sans qu'on soit obligé d'examiner le rapport des autres Angles & des autres Côtés.

CHAPITRE II.

LES QUADRILATERES.

1\. Le Quadrilatere en général.

APrès le Triangle, le Quadrilatere est la plus simple de toutes les Figures planes. Ses quatre Angles ont-ils, comme les trois du Triangle, un rapport constant avec un certain nombre d'Angles droits? C'est la premiere question qui vient à l'esprit.

Fig. 20.

Pour la résoudre, construisons un Quadrilatere. Ayant les deux Lignes AB, BC faisant Angle, si je joignois l'extrémité de ces deux Lignes

par une droite AC, ce seroit un Triangle. Mais ne voulant pas terminer la Figure si brusquement, du Point A je tire une Ligne AD dans une autre Direction que AC; & ensuite je joins les extrémités D & C par une droite DC. Voilà le Quadrilatere formé, & la voye qu'il faut nécessairement prendre pour le construire, de quelque espèce qu'il puisse être.

Il est évident qu'en tirant la Ligne AD hors de la Direction de AC, je fais l'Angle en A plus grand qu'il n'auroit été, si j'avois terminé la Figure par la Ligne AC: ou plutôt j'ajoute un nouvel Angle en A séparé de son voisin par la Ligne AC. De plus, en joignant l'extrémité D à l'extrémité C par la Ligne DC, je forme un nouvel Angle en D. Enfin, l'Angle en C sera plus grand que si la Figure avoit été terminée par la Ligne AC; ou plutôt, je fais un nouvel Angle en C séparé de son voisin par la Ligne AC. Ainsi, en construisant un Quadrilatere, j'ajoute un second Triangle ADC au premier ABC; & les six Angles de ces deux Triangles égaux à quatre droits, sont évidemment les mêmes que les quatre du Quadrilatere. Donc *les quatre Angles du Quadrilatere sont égaux à quatre droits.*

Pour nous confirmer dans cette découverte, faisons attention qu'il n'y a point de Quadrilatere que l'on ne puisse partager en deux Triangles, par une Ligne tirée d'Angle en Angle, que par cette raison que l'on nomme *Diagonale.* Les quatre Angles du Quadrilatere sont évidemment la même chose que les six Angles des deux Fig. 20.

Triangles. Or ceux-ci ſont égaux à quatre droits. Donc, &c.

Obſervons ici en paſſant, par rapport aux Quadrilateres & aux autres Polygônes plus compoſés, que l'on ſuppoſe toujours l'intérieur des Angles en-dedans de la Figure, & la Pointe en-dehors. S'il arrivoit que quelqu'un des Angles rentrât en-dedans, on auroit une Figure trop irréguliere pour mériter le nom de Polygône. On ne pourroit déſirer que d'en connoître la ſuperficie. C'eſt ce dont nous parlerons dans la Section ſuivante.

Fig. 21.

2. Diviſion du Quadrilatere dans ſes eſpéces.

APrès avoir conſidéré le Quadrilatere dans ſa généralité, il faut le diviſer dans ſes eſpéces.

Ou bien les Quadrilateres ont tous leurs Côtés oppoſés paralleles; ou bien ils n'en ont que deux; ou bien ils n'en ont aucun.

Fig. 20. Ceux de la derniere eſpéce, comme étant les plus irréguliers, conſervent le nom général de *Quadrilateres*. On les nomme auſſi *Trapézoïdes*.

Fig. 22. Ceux qui ont ſeulement deux Côtés oppoſés paralleles, ſont appellés *Trapèzes*.

Enfin, l'on nomme *Parallélogrammes*, ceux dont tous les Côtés oppoſés ſont paralleles.

Fig. 23. Le *Parallélogramene* eſt droit ou incliné. Il eſt droit, lorſque deux Côtés paralleles ſont joints par deux Perpendiculaires : on l'appelle *Parallélogramme rectangle*, ou ſimplement, *Rectangle*.

Fig. 24. Un Rectangle dont tous les Côtés ſont égaux, eſt un *Quarré*, le plus régulier de tous les Quadrilateres,

drilateres, & le seul qui soit parfaitement régulier.

Le Parallélogramme est oblique ou incliné, lorsque deux de ses Côtés paralleles sont joints par deux Lignes également inclinées. On le nomme quelquefois *Rhomboïde*. Fig. 25.

Le Parallélogramme incliné, dont tous les Côtés sont égaux, est appellé *Rhombe* ou *Lozange*. Nous allons voir tout à l'heure pourquoi cette Figure n'est pas parfaitement réguliere. Fig. 26.

3. Propriétés des Parallélogrammes.

PArmi les Quadrilateres, il n'y a guères que le Parallélogramme dont le contour mérite attention. En voici les principales propriétés.

I.

Dès qu'un Parallélogramme a un Angle droit, les trois autres le sont aussi.

Car pour former cet Angle droit, il faut que la Ligne AD qui joint les deux Paralleles AB, DC, soit perpendiculaire. Par conséquent, si l'Angle en D est droit, l'Angle en A doit l'être aussi. Mais comme le Côté BC, qui doit joindre les deux Paralleles par leurs extrémités B & C, est parallele à son Côté opposé AD, il doit aussi être perpendiculaire, & par conséquent former des Angles droits en B & en C. Fig. 23.

2.

Dans tout Parallélogramme les Angles opposés sont égaux.

Cela n'a pas besoin de preuve, si le Parallélogramme est rectangle. S'il est incliné, il a deux Angles opposés obtus, & les deux autres aigus. Or les obtus sont égaux, ainsi que les aigus. Car Fig. 25.

les Côtés AD, BC étant également inclinés dans l'espace parallele, doivent s'approcher également de la Parallele dont ils s'approchent, & s'éloigner également de celle dont ils s'éloignent.

3.

Fig. 23, 24, 25 & 26. *Dans tout Parallélogramme, deux Angles voisins, tels que A & B, B & C, C & D, D & A, sont égaux à deux droits.*

Car ces deux Angles voisins sont internes dans un espace parallele.

4.

Dans tout Parallélogramme les Côtés opposés sont égaux.

Mêmes Fig. Car ces Côtés opposés sont ou deux Perpendiculaires, ou deux également Obliques tirées dans un espace parallele.

5.

La Diagonale partage tout Parallélogramme en deux Triangles égaux.

Mêmes Fig. Car les trois Côtés du Triangle ABC sont égaux aux trois Côtés du Triangle ADC. 1°. La Diagonale est commune aux deux. 2°. Le Côté AB est égal à son opposé DC, & AD à son opposé BC. 3°. Les Angles compris B & C sont égaux. Donc, &c.

6.

Les deux Diagonales d'un Parallélogramme rectangle sont égales.

Fig. 27. 28. Car ce sont deux Lignes également obliques, & tirées avec les mêmes conditions dans un espace parallele.

7.

Dans un Parallélogramme incliné, les deux Diagonales sont inégales.

Car dans cette Figure les Angles obtus s'approchent, & les aigus s'éloignent, à proportion que le Parallélogramme est plus ou moins incliné. Fig. 25. & 29.

8.

Dans un Parallélogramme rectangle les deux Diagonales se coupent par le milieu au Point E.

Cela est évident dans le Quarré, que les deux Diagonales partagent en quatre Triangles égaux, en se coupant perpendiculairement. En effet, le Triangle ABC étant isocelle, la Perpendiculaire BE coupe la Base AC & l'Angle B en deux également. Donc les deux Triangles AEB, BEC sont égaux. Par la même raison le Triangle BEC est égal à ECD, & ce dernier au Triangle DEA. Fig. 27.

Cela n'est pas moins évident dans le Parallélogramme rectangle allongé. Car quoique les deux Diagonales ne partagent pas le Rectangle en quatre Triangles égaux, les Triangles opposés par le Sommet le sont nécessairement. 1°. Les deux Triangles opposés sont isocelles. Car les Côtés EA, EB, qui partent d'un même Point, sont des Lignes également inclinées sur la Base AB, & par conséquent sont égales; & de même les Lignes EC, ED. 2°. Ces deux Triangles sont égaux; car les Angles égaux opposés au Sommet en E ont pour Bases deux Lignes égales AB, DC. Donc leurs Côtés sont également allongés. Fig. 28.

9.

LIV. II. I. SECT. CHAP. II. Fig. 27. & 28.

Dans un Parallélogramme rectangle, le Point d'intersection des deux Diagonales E est également éloigné du Sommet des quatre Angles.

C'est une suite de la Proposition précédente.

10.

On peut faire passer la Circonférence d'un Cercle par le Sommet des quatre Angles d'un Parallélogramme rectangle.

Fig. 28. Car prenant pour Centre l'intersection des deux Diagonales, & pour Raïon une de leurs moitiés, comme EA, la Circonférence passera par les quatre Sommets.

Fig. 27. A plus forte raison tout Quarré pourra être inscrit dans un Cercle. Ses Côtés y sont des Cordes égales, dont chacun soutient un quart de la Circonférence.

Dans ces deux cas, les Diagonales du Rectangle, soit quarré, soit allongé, sont deux Diamétres du Cercle.

11.

On ne peut faire passer un Cercle par le Sommet des quatre Angles d'un Parallélogramme incliné.

Fig. 29. Car le Point qui pourroit servir de Centre ne pourroit se trouver que dans l'intersection des deux Diagonales. Il est vrai que ces Diagonales se coupent par la moitié; que la partie EA est égale à la partie EC; & la partie EB à la partie ED. Mais la partie EA n'est pas pas égale à la partie EB : ni la partie EC à la partie ED, parceque la Diagonale entiere qui joint les Angles obtus est plus courte que celle qui joint les Angles ai-

gus. Par conséquent, si du Centre E l'on décrivoit un Cercle avec le Raïon EA, la Circonférence passeroit par les Sommets A & C; mais seroit au-dessous des Sommets B & D. Au contraire avec le Raïon ED, la Circonférence qui passeroit par les Sommets D & B, seroit au-dessus des Sommets A & C.

12.

Certains Trapezes, & d'autres Quadrilateres encore plus irréguliers, peuvent être inscrits dans un Cercle.

Si l'on prend dans un Cercle deux Cordes inégales paralleles, & qu'on en joigne les extrémités par deux Cordes qui ne peuvent manquer d'être obliques en sens différent, on aura un Trapeze inscrit dans un Cercle. Fig. 30.

De même, si dans la Circonférence d'un Cercle on marque quatre Points fort inégalement éloignés les uns des autres, & qu'on joigne ces quatre Points par quatre Lignes droites, on aura un Quadrilatere tout-à-fait irrégulier inscrit dans un Cercle. Fig. 31.

Par conséquent, si l'on avoit arrangé ces quatre Points hors de la Circonférence, comme ils le sont sur la Circonférence même, on auroit un Point-milieu également éloigné des quatre Points. Mais comme l'irrégularité des Trapezes, & sur-tout des *Quadrilateres* simplement quadrilateres, peut varier à l'infini, pour un, auquel on pourroit par hazard circonscrire un Cercle, il y en auroit mille qui ne seroient pas susceptibles de cette opération.

Tout ceci n'est qu'une application de ce qui

à été plus amplement exposé dans le Livre précédent, Chap. II. §. I. sur la nature & la formation de la Courbe circulaire.

CHAPITRE III.

LES POLYGONES.

§. I.

LES POLYGONES EN GENERAL.

QUoique les Triangles & les Quadrilateres soient de vrais Polygônes, on ne donne ordinairement ce nom qu'aux Figures de plus de quatre Côtés.

Nous avons vu que les Angles d'une Figure à trois Côtés sont égaux à deux Angles droits; que l'augmentation d'un seul Côté rend les Quadrilateres égaux à quatre droits. L'addition d'un Côté augmente-t'elle constamment de deux Angles droits la valeur totale des Angles d'un Polygône?

Pour décider cette question, construisons un Pentagône, premier des Polygônes proprement dits.

Fig. 32. Ayant les deux Lignes AB, BC faisant un Angle quelconque : si je joins les extrémités de ces Lignes par une droite AC, j'ai un Triangle. Mais en désignant simplement par des Points cette Ligne que je pouvois tracer, je tire AE

dans une autre Direction. Si je joignois l'extrémité E de cette nouvelle Ligne à l'extrémité C de la Ligne BC, j'ajouterois un second Triangle au premier, & je terminerois le Quadrilatere. Je me contente encore de marquer cette EC par des Points, & j'en tire une nouvelle ED dans une autre Direction. Il est évident qu'en terminant la Figure par un cinquiéme Côté DC, j'ajoute un troisiéme Triangle aux deux premiers. Or les neuf Angles de ces trois Triangles sont, je ne dis pas égaux aux cinq du Pentagône, mais précisément la même chose. Donc *les cinq Angles du Pentagône sont égaux à six droits.*

Il est manifeste, que si j'avois construit un Exagône, j'aurois ajouté un quatriéme Triangle; & que j'ajouterois toujours un nouveau Triangle, en donnant au Polygône un nouveau Côté. Donc l'*addition d'un Côté à un Polygône quelconque augmente le total de ses Angles de la valeur de deux droits.* Fig. 33.

Ainsi le rapport de la somme des Angles des Polygônes à un nombre constant d'Angles droits, à commencer par le Triangle, croît selon la Progression arithmétique des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, &c.

Pour nous affermir dans cette découverte, considérons un Pentagône quelconque tout construit. Du Sommet d'un Angle pris à volonté, tel que C, je tire des Diagonales à autant d'Angles qu'il me sera possible: je vois que je ne puis en tirer que deux, sçavoir, à l'Angle en A & à l'Angle en E. Or ces deux Diagonales partagent le Pentagône en trois Triangles, dont les Fig. 32.

Liv. II. I. Sect. Chap. III. §. I. Fig. 33.

neuf Angles sont les cinq du Pentagône. Donc les cinq du Pentagône, ainsi que les neuf des trois Triangles, sont égaux à six Angles droits.

Dans un Exagône, on peut de l'Angle C tirer une troisiéme Diagonale au nouvel Angle en F : & ces trois Diagonales partageant l'Exagône en quatre Triangles, montrent que la somme de ses Angles est égale à huit droits. Ainsi le nombre des Triangles dans lesquels un Polygône peut être partagé, augmentant comme les Côtés, chaque addition d'un Côté ajoutera la valeur de deux Angles droits.

Il est aisé maintenant d'établir une régle générale, pour découvrir sans peine à quel nombre d'Angles droits les Angles d'un Polygône quelconque sont égaux.

Fig. 32, 33.

Pour cela, considérons qu'en partageant un Polygône en Triangles par le moyen des Diagonales tirées du Sommet C d'un de ses Angles, il faut employer deux Côtés du Polygône pour faire le premier Triangle, & deux autres pour le dernier. Au lieu qu'il ne faut qu'un Côté du Polygône avec les Diagonales, pour faire un des Triangles intermédiaires. Par conséquent tout Polygône, quelque soit le nombre de ses Côtés, peut être partagé en autant de Triangles qu'il a de Côtés, moins deux. Donc *la somme des Angles d'un Polygône quelconque est égale à deux fois autant d'Angles droits, qu'il a de Côtés, moins deux*. Ainsi, retranchant par l'esprit deux Côtés du Polygône, & doublant le reste, ce double donne le nombre d'Angles droits que l'on cherche. Ayant, par exemple, un Po-

lygône de vingt Côtés, ôtez-en 2, reste 18 : le double de 18 est 36. Il est clair que les vingt Angles du Polygône sont égaux à 36 droits.

Fig. 34.

On parvient à la même Conclusion par une autre méthode fort ingénieuse. Au lieu de partager le Polygône en Triangles par des Diagonales, d'un Point Z pris au hazard dans l'intérieur de la Figure, soient tirées des Lignes droites à tous les Angles : le Polygône sera partagé en autant de Triangles qu'il a de Côtés, & le Point Z sera le Sommet commun de tous ces Triangles.

Il est évident qu'à l'exception des Angles qui sont autour du Sommet commun, le reste des Angles de ces Triangles est égal aux Angles du Polygône. Or chacun de ces Triangles vaut deux Angles droits. Les Angles du Polygône pris ensemble seroient donc égaux à deux fois autant d'Angles droits qu'il a d'Angles ou de Côtés, s'il n'en falloit pas ôter la valeur des Angles qui sont autour du Sommet commun Z ; c'est-à-dire, la valeur de quatre droits. Donc *les Angles d'un Polygône quelconque sont égaux à deux fois autant d'Angles droits, moins quatre, que le Polygône a de Côtés.*

Cette Conclusion est précisément la même, en d'autres termes, que celle de la premiere méthode. Ayant un Exagône, par exemple : qu'on en retranche deux Côtés, & qu'on double les quatre autres, le nombre 8 exprime le nombre d'Angles droits ausquels les Angles de l'Exagône sont égaux. Il en sera de même si l'on commence par doubler les Côtés de l'Exagône.

Liv. II. I. Sect. Chap. III. §. I.

Le nombre 12 exprime les Angles droits égaux à la somme des Angles de l'Exagône, pourvu qu'on en retranche 4. Car 12−4=8.

De même ayant un Polygône de 20 Côtés, le double de 20 est 40 ; & ce nombre 40, en retranchant 4, sera le nombre d'Angles droits que l'on cherche. Car 40−4=36.

On voit par-là, jusqu'à quel point la valeur des Angles des Polygônes peut croître, relativement au nombre de leurs Côtés. Le Triangle vaut deux Angles droits : le Quadrilatere, 4 : le Pentagône, 6 : l'Exagône, 8 : le Polygône de vingt Côtés, 36 : celui de cent Côtés, 196 : celui de mille Côtés, 1996 : celui de dix mille Côtés, 19996, &c. De sorte que plus un Polygône aura de Côtés, & plus le nombre d'Angles droits ausquels ses Angles sont égaux, approchera du double de ses Côtés ou de ses Angles. Mais jamais aucun Polygône ne parviendra à ce double : il s'en faudra toujours quatre Angles droits.

Il suit de-là, que *tous les supplémens des Angles d'un Polygône quelconque, pris ensemble, sont toujours égaux à quatre Angles droits.*

Car il s'en manque toujours quatre, que les Angles d'un Polygône ne soient égaux à deux fois autant d'Angles droits.

Fig. 35. Ces supplémens sont exprimés par l'Angle extérieur, que forme le prolongement d'un Côté du Polygône. Car cet Angle avec son voisin intérieur sont deux Angles de suite égaux à deux droits. Par conséquent, en prolongeant tous les Côtés d'un Polygône pour faire des

Angles extérieurs, on a tous les supplémens des Angles intérieurs. Donc *tous les Angles extérieurs d'un Polygône quelconque, pris ensemble, sont égaux à quatre droits.* Ainsi les mille Angles extérieurs d'un Polygône de mille Côtés, ne valent pas davantage que les trois Angles extérieurs d'un Triangle. Mais chacun de ces Angles extérieurs, qui sont très-grands dans le Triangle, diminue à mesure que le Polygône acquiert de Côtés, & devient insensible dans les Polygônes dont le nombre de Côtés est prodigieux. L'Angle extérieur d'un Polygône régulier d'un million de Côtés, n'auroit pour mesure que la millioniéme partie d'une Circonférence de Cercle.

---

§. II.

LES POLYGONES REGULIERS, & leur double Raïon.

1. Circonscription du Cercle aux Polygônes.

LEs Polygônes sont *réguliers* ou *irréguliers.* Un Polygône est *irrégulier* lorsque ses Angles & ses Côtés ne sont point égaux entr'eux.

Nous avons vu dans le Chapitre précédent, qu'un Quadrilatere irrégulier pouvoit se trouver par hazard inscrit dans un Cercle. On doit dire la même chose des Polygônes irréguliers de plus de quatre Côtés. Car si l'on marque plus de quatre Points sur une Circonférence à des distances inégales, & qu'on joigne ces Points par des Lignes droites qui seront des Cordes, il

Fig. 36.

Liv. II. I. Sect. Chap. II. §. II.

en résultera un Polygône irrégulier inscrit dans le Cercle. Mais après ce qu'on a dit à ce sujet dans le Chapitre précédent & dans le I. Liv. Chap. II. §. I, il est inutile de s'étendre davantage, pour prouver qu'on ne peut circonscrire de Cercle à la plûpart des Polygônes irréguliers.

Un Polygône est *régulier*, lorsque tous ses Angles sont égaux, aussi-bien que ses Côtés.

Il suit de cette *parfaite* uniformité, que *tout Polygône régulier peut être inscrit dans un Cercle.*

Car l'égalité parfaite de ses Côtés aussi-bien que de ses Angles, est tout-à-fait propre à représenter le changement uniforme de Direction qui se fait de Point en Point dans la Circonférence du Cercle sous des Angles égaux. Ayant donc deux Lignes égales sous un Angle, si j'ajoute une troisiéme Ligne égale propre à former un Polygône régulier, sous le même Angle, la Circonférence qui a déja passé par les trois Points A, B, C, passera nécessairement par le Point D. Car les trois Points B, C, D étant entr'eux dans la même situation que les trois Points A, B, C, doivent être à la même distance d'un Point commun, qui sera le Centre d'une Circonférence où ils seront tous placés. Or le quatriéme Point d'une Ligne circulaire étant déterminé, tous les autres le sont aussi à suivre la même route. Par conséquent la Circonférence qui a passé par le Sommet de quatre Angles d'un Polygône régulier, passera par le Sommet de tous les autres, quelqu'en soit le nombre.

Fig. 37.

En effet, il est assez visible que tout Polygône régulier n'est autre chose qu'un amas suivi de

Cordes égales dont on a retranché les Arcs ; & la grandeur de ces Arcs est marquée par la distance qu'il y a du Sommet d'un Angle à un autre. Il n'y a point de Circonférence de Cercle que l'on ne puisse diviser dans un nombre quelconque d'Arcs égaux. Or en joignant les extrémités de ces Arcs par des Cordes, on a un Polygône régulier. Par conséquent, ayant un Polygône régulier hors du Cercle, on peut l'inscrire dans une Circonférence, parcequ'il y a certainement un Cercle possible, où les Côtés de ce Polygône seroient des Cordes égales.

Il suit de-là, que le Polygône régulier a un Centre aussi-bien que le Cercle, & que *toutes les Lignes tirées de ce Centre aux Sommets des Angles, sont égales.* Car elles sont des Raïons du Cercle circonscrit. On appelle ces Lignes, *Raïons obliques* du Polygône, parcequ'elles tombent obliquement sur ses Côtés. Et l'on appelle *Raions droits*, les Lignes qui du même Centre sont tirées perpendiculairement sur les Côtés du Polygône. La considération de ces deux sortes de Raïons, nous découvre plusieurs propriétés dans les Polygônes réguliers. Je commence par le Raïon oblique.

I.

2. Raions obliques des Polygônes réguliers. Fig. 37.

Si du Point central, l'on tire tous les Raïons obliques du Polygône, la Figure sera divisée en autant de Triangles égaux qu'elle a de Côtés.

Car chacun de ces Triangles a deux Raïons obliques pour ses Côtés ; & tous ces Raïons obliques sont égaux. D'ailleurs toutes les Bases

sont égales, parcequ'elles sont les Côtés mêmes du Polygône régulier.

2.

Tous ces Triangles sont isocelles, puisqu'ils ont pour Côtés deux Raïons obliques.

3.

Tous les Angles compris entre ces Raïons sont égaux. Car ils ont tous pour mesure un Arc égal dans le Cercle, soutenu par une Corde égale, Côté du Polygône, & qui sert de Base au Triangle.

Cet Angle est appellé *Angle du Centre*, parceque son Sommet est au Point central du Polygône.

4.

Les deux Angles de la Base de chacun de ces Triangles sont égaux. Car telle est la nature des Triangles isocelles.

5.

Le Raïon oblique partage l'Angle du Polygône régulier en deux Angles égaux.

Fig. 37. Car les Côtés AB, BC, par exemple, étant tous les deux dans la même situation par rapport au Centre, le Raïon qui part de ce Centre & qui tombe sur l'extrémité des deux Côtés qui se joignent, a la même Obliquité sur l'un & sur l'autre; & par conséquent y forme des Angles égaux, dont chacun est moitié de l'Angle total du Polygône.

D'ailleurs tous les Triangles qui partagent le Polygône, étant égaux & isocelles, ont tous leurs Angles respectivement égaux, sçavoir, les Angles du Sommet d'un côté, & de l'autre les

Angles de la Base. Par conséquent les Angles O & O de deux Triangles voisins sont égaux : par conséquent chacun d'eux est moitié de l'Angle total ABC.

Fig. 37.

L'Angle du Polygône régulier est nommé *Angle de la Circonférence*, parcequ'il est formé par deux Côtés du Périmétre ou Circonférence du Polygône, & que son Sommet est dans la Circonférence du Cercle circonscrit, à la différence de l'*Angle du Centre*, formé par deux Raïons obliques.

6.

L'Angle de la Circonférence d'un Polygône régulier, & l'Angle du Centre, pris ensemble, sont égaux à deux droits.

Car l'Angle de la Circonférence, étant partagé en deux Angles égaux par le Raïon oblique, est égal aux deux Angles de la Base d'un des Triangles isocelles formé par deux Raïons obliques & un Côté du Polygône. Or ces deux Angles de la Base, joints à l'Angle du Centre, sont égaux à deux droits, puisque ce sont les trois Angles d'un Triangle.

7.

L'Angle du Centre d'un Polygône régulier est égal au supplément de l'Angle de la Circonférence.

Car l'un ou l'autre, avec l'Angle de la Circonférence valent deux droits.

3. Propriété de l'Exagône régulier.

NOus venons de voir que les Triangles formés dans un Polygône régulier par les Raïons obliques, sont tous isocelles. Il s'agit d'exami-

ner maintenant s'il y a quelques Polygônes où ces Triangles isocelles soient équilateraux.

Liv. II. I. Sect. Chap. III. §. II. Fig. 38.

Soit un Triangle équilateral inscrit dans un Cercle. Si l'on tire les trois Raïons obliques de ce Polygône, on aura trois Triangles isocelles qui partageront le grand Equilateral, mais qui ne seront point eux-mêmes équilateraux. Car l'Angle du Centre de chacun de ces Triangles a pour mesure le tiers de la Circonférence du Cercle, c'est-à-dire, un Arc de 120 Degrés. Un tel Angle est obtus, & le Triangle obtus-angle ne peut être équilateral.

Fig. 39. Supposons maintenant un Quarré inscrit dans un Cercle, & partagé en quatre Triangles isocelles par ses Raïons obliques. L'Angle du Centre de chacun de ces Triangles est droit, parcequ'il a pour mesure le quart de la Circonférence du Cercle. Or un Triangle rectangle ne peut être équilateral.

Fig. 37. Le Triangle formé par deux Raïons obliques dans le Pentagône régulier, n'est pas non plus équilateral. Car l'Angle du Centre dans ce Triangle a pour mesure la cinquiéme partie de la Circonférence du Cercle, c'est-à-dire, un Arc de 72 Degrés. A la vérité cet Angle est aigu; mais ceux de la Base le sont encore davantage. Car joints à l'Angle du Centre, ils sont égaux à deux droits, dont la valeur est de 180 Degrés. Or de 180 ôtant 72 pour l'Angle du Centre, il ne reste que 108 Degrés pour la valeur des deux Angles de la Base, 54 pour chacun. Donc la Base AB est encore plus grande que le Raïon oblique.

Considérons

Considérons maintenant l'Exagône régulier. Son Angle du Centre a pour mesure la sixiéme partie de la Circonférence du Cercle circonscrit, c'est-à-dire, un Arc de 60 Degrés. Or ôtant ces 60 Degrés de 180, valeur des trois Angles du Triangle formé par les deux Raïons obliques, reste 120 Degrés, c'est-à-dire, 60 pour chaque Angle de la Base. Donc *les Triangles qui partagent l'Exagône régulier sont équiangles, & par conséquent équilateraux.*

Donc, *la Base de chacun de ces Triangles, c'est-à-dire, le Côté de l'Exagône régulier, est égal à son Raïon oblique, ou, ce qui est la même chose, au Raïon du Cercle circonscrit.*

Donc, *le Périmétre de l'Exagône est six fois plus grand que le Raïon, & trois fois plus grand que le Diamétre de ce Cercle.*

Donc enfin, *le Raïon d'un Cercle porté six fois sur sa Circonférence, la partage en six Arcs égaux, & trace l'Exagône régulier.*

Telle est la célébre propriété de ce Polygône: propriété qui ne convient qu'à lui seul. Car dans l'Eptagône, l'Angle du Centre n'a pas 60 Degrés, puisqu'il n'a pour mesure que la septiéme partie de la Circonférence. Par conséquent dans le Triangle formé par deux Raïons obliques, les Angles de la Base ont plus de 120 Degrés à partager entr'eux également. Donc la Base, c'est-à-dire, le Côté de l'Eptagône, opposé au plus petit Angle, a moins de longueur que le Raïon oblique. Donc les Triangles isocelles, qui partagent l'Eptagône régulier, ne sont pas équilateraux. Ils ne le seront pas à plus forte rai-

son dans les Polygônes de plus de sept Côtés.

LIV. II. I. SECT. CHAP. III. §. II.

4. Raïon droit des Polygônes réguliers. Fig. 41.

VEnons à présent au Raïon droit du Polygône régulier, c'est-à-dire, à la Ligne, qui tirée du Centre du Polygône; tombe perpendiculairement sur le Côté.

Il est d'abord assez évident que *tous les Raïons droits d'un Polygône régulier sont égaux*. Car ils mesurent la distance des Côtés au Centre du Polygône. Or cette distance est égale, puisque les Côtés du Polygône régulier sont Cordes égales dans le Cercle circonscrit.

Fig. 37, 38, 39, & 40.

Il est encore assez évident que *le Raïon droit coupe le Côté du Polygône régulier en deux parties égales*. Car les deux Raïons obliques qui tombent sur les deux extrémités du Côté, étant des Obliques égales, sont également éloignées de la Perpendiculaire qui part du même Point.

Fig. 41.

Il suit de-là, que *l'on peut inscrire un Cercle dans tout Polygône régulier*. Car prenant le Centre du Polygône pour le Centre du Cercle; & pour Raïon, le Raïon droit du Polygône, la Circonférence passera nécessairement par l'extrémité de tous les Raïons droits, & les Côtés du Polygône seront des Tangentes à ce Cercle.

En comparant le Raïon droit avec le Raïon oblique du Polygône régulier, il est évident que le premier est toujours plus petit que le second; puisque la Perpendiculaire est la Ligne la plus courte que l'on puisse abaisser d'un Point donné sur une Ligne.

Mais *la différence entre ces deux Raïons diminue à proportion que le Polygône a plus de Côtés*.

Pour nous en convaincre, supposons que dans une seule Circonférence de Cercle, ou dans plusieurs Circonférences égales, on inscrive divers Polygônes réguliers en commençant par le plus simple. Il faut d'abord remarquer, qu'au moyen de cette construction, tous ces Polygônes auront pour Raïons obliques des Lignes égales; puisque tous ces Raïons obliques sont Raïons du même Cercle ou de Cercles égaux. Mais on va voir qu'il n'en est pas de même des Raïons droits de ces Polygônes.

Fig. 38. Ayant donc un Triangle équilateral inscrit dans le Cercle, & divisé en Triangles isocelles par ses Raïons obliques, l'Angle du Centre est obtus, & la Base est une grande Corde qui soutient le tiers de la Circonférence. Par conséquent les Raïons obliques, qui du Centre vont se rendre aux deux extrémités de la Base, sont très-inclinés sur cette Ligne, & très-éloignés du Point-milieu, où tombera la Perpendiculaire abaissée du Centre. Cette Perpendiculaire, c'est-à-dire, le Raïon droit, sera donc très-petite en comparaison de la longueur des obliques.

Fig. 39. Inscrivons maintenant un Quarré dans un de nos Cercles, & divisons-le en Triangles par ses Raïons obliques. Ces Raïons sont égaux à ceux du Triangle équilateral inscrit dans le même Cercle ou dans un Cercle égal. Mais le Raïon droit du Quarré est plus grand que le Raïon droit du Triangle. Car le Côté de celui-ci est Corde d'un tiers de Circonférence: au lieu que celui du Quarré n'est Corde que d'un quart. Donc les Raïons obliques sont moins inclinés

sur la Base du Quarré que sur la Base du Triangle; & par conséquent moins éloignés de la Perpendiculaire. Donc cette Perpendiculaire, ou Raïon droit, est plus longue dans le Quarré que dans le Triangle.

De plus, le Côté du Quarré étant une plus petite Corde dans le Cercle circonscrit que le Côté du Triangle, est aussi plus éloigné du Centre. Par conséquent le Raïon droit qui mesure la distance du Centre du Polygône régulier à l'un de ses Côtés, a plus de longueur dans le Quarré, que dans le Triangle équilateral. Donc par la même raison, le Raïon droit est plus grand dans le Pentagône, que dans le Quarré: plus grand dans l'Exagône, que dans le Pentagône, & ainsi de suite; parcequ'à mesure que le Polygône acquiert un Côté de plus, ce Côté devient une Corde plus petite, & par conséquent plus éloignée du Centre.

Fig. 37, 40.

On peut donc établir pour maxime générale, que *toute proportion gardée, il y a moins de différence entre le Raïon droit & le Raïon oblique dans un Polygône régulier qui a beaucoup de Côtés, que dans un autre qui en a moins.*



§ III.

VALEUR DES ANGLES *dans les Polygônes réguliers.*

IL n'est pas possible d'évaluer les Angles dans les Polygônes irréguliers ; parceque l'irrégularité de ces Figures, qui n'a rien de fixe, produit une variation infinie dans les Angles que forment les différentes inclinaisons des Côtés les uns sur les autres. Il n'y a donc que les Polygônes réguliers, dont les Angles étant toujours les mêmes dans chaque espece, soient susceptibles d'évaluation.

L'Angle du Triangle équilateral est suffisamment connu. Inscrit dans un Cercle, il s'appuye sur le tiers de la Circonférence. Par conséquent il a pour mesure le sixiéme de la Circonférence, c'est-à-dire, un Arc de 60 Degrés. L'Angle du Triangle équilateral est donc toujours aigu.

On sçait de reste que l'Angle du Quarré est toujours droit. Il ne peut donc y avoir de difficulté que par rapport aux Polygônes réguliers de plus de quatre Côtés.

On voit d'abord que leurs Angles ne peuvent être ni aigus ni droits, & qu'ils sont nécessairement obtus. Car ayant tous leur Sommet dans la Circonférence du Cercle circonscrit, ils sont Angles du petit Segment, & s'appuyent sur un Arc plus grand qu'une demi-Circonférence. Fig. 37. 40.

Liv. II. I. Sect. Chap. III. §. III.

Donc, plus le Polygône aura de Côtés, & plus ses Angles seront obtus. Mais quelle sera la valeur de cet Angle obtus dans chaque espéce de Polygône? Pour parvenir à la connoître, voici trois méthodes également sûres. Je suppose toujours le Polygône inscrit dans un Cercle.

1.

Fig. 37, 38, 39, & 40.

La Circonférence du Cercle se trouve divisée en autant d'Arcs égaux que le Polygône a de Côtés. Mais il faut observer qu'il y a toujours deux de ces Arcs sur lesquels l'Angle du Polygône ne s'appuye pas: par exemple, l'Angle ABC ne s'appuye pas sur les Arcs AB, BC. Il faut donc retrancher ces deux Arcs, & prendre pour mesure de l'Angle la moitié du reste des Arcs.

S'il s'agit, par exemple, de connoître la valeur de l'Angle d'un Octogône régulier, on voit que cet Angle qui a son Sommet dans la Circonférence, ne s'appuye que sur six des huit Arcs égaux, c'est-à-dire, sur les trois quarts de la Circonférence; & par conséquent, qu'il a pour mesure un quart & demi de la Circonférence, c'est-à-dire, un Arc de $90+45$ Degrés $= 135$.

2.

Nous sçavons que les Angles de tout Polygône, pris ensemble, sont égaux à deux fois autant d'Angles droits moins quatre, que le Polygône a de Côtés. Il ne s'agit donc que de réduire en Degrés les Angles droits ausquels la totalité des Angles du Polygône sont égaux, &

divifer enfuite cette fomme par le nombre des Angles ou des Côtés du Polygône. Le quotient fera la valeur de chacun de ces Angles.

Nous trouverons par ce moyen la valeur de l'Angle d'un Octogône régulier. Car les 8 Angles de cette Figure font égaux à 12 droits. 12 Angles droits valent 1080 Degrés. Or 1080 divifé par 8, donne 135.

3.

Nous fçavons encore que dans un Polygône régulier, l'Angle du Centre joint à l'Angle de la Circonférence, font égaux à deux droits. Ainfi trouvant le premier, on a la valeur du fecond. Or il eft aifé de connoître l'Angle du Centre, dont la mefure eft un de ces Arcs égaux qui répondent à chaque Côté du Polygône.

Par cette voie l'on découvrira pour la troifiéme fois la valeur de l'Angle de notre Octogône. Car l'Angle du Centre dans cette Figure a pour mefure le huitiéme de la Circonférence, ou le quart de 180 Degrés, c'eft-à-dire, 45. Or 45 étant ôté de 180, refte 135.

Cette troifiéme méthode eft la plus fimple, la plus naturelle & la plus facile. Mais on peut, pour s'exercer, chercher par les trois que j'ai propofées, la valeur de l'Angle de tel Polygône régulier que l'on imaginera.

Etant en état par ce moyen de connoître la valeur des Angles de tout Polygône régulier, il eft aifé d'affigner ceux dont les Angles peuvent tellement s'ajufter enfemble fans vuide, que leurs Sommets fe réuniffent en un feul Point.

LIV. II. I. SECT. CHAP. III. §. III.

C'eſt un petit Problême qui concerne le Carrelage.

Il faut obſerver que tous ces Angles pris enſemble doivent être égaux à quatre droits; car telle eſt la nature des Angles qui ſont rangés autour d'un Point central.

Cela poſé, on voit que les Triangles équilateraux peuvent s'arranger aiſément de cette façon. Car chacun de leurs Angles vaut 60 Degrés. Or ſix fois 60 font 360 Degrés. Donc ſix Angles de Triangles équilateraux peuvent ſe réunir en un Sommet commun.

On parviendra au même but en prenant 4 Quarrés, puiſque tous les Angles de cette Figure ſont droits.

L'Angle du Pentagône eſt de 108 Degrès. Trois de ces Angles ne montent qu'à 324. Il y auroit donc un vuide, qui ne pourroit être rempli que par un Angle de 36 Degrés. Mais 4 Angles du Pentagône feroient 432 Degrés, qui ſurpaſſent de 72 la ſomme preſcrite de 360. Cette Figure n'eſt donc pas propre à notre deſſein.

L'Angle de l'Exagône eſt de 120 Degrés. Trois fois 120 font 360 valeur de 4 Angles droits. Donc trois Angles de l'Exagône régulier peuvent ſe réunir en un ſeul Sommet.

L'Angle de l'Eptagône eſt d'un peu plus de 128 Degrés. Or trois fois 128 font plus de 360. Donc trois des Angles de cette Figure ne peuvent ſe réunir en un Sommet commun. A plus forte raiſon les Polygônes de plus de ſept Côtés ne le pourront pas.

Ainsi, de tous les Polygônes réguliers, il n'y a que le Triangle équilatéral, le Quarré & l'Exagône qui puissent remplir les conditions proposées.

CHAPITRE IV.

LE CERCLE.

DE toutes les Figures planes, il ne nous reste plus que le Cercle à considérer. Nous nous sommes déja beaucoup occupés dans le premier Livre, de sa Circonférence, sous le nom de Courbe circulaire, par rapport aux Lignes droites qui la coupent ou la touchent en-dedans & en-dehors. Nous l'avons ensuite envisagée dans ce Livre-ci comme pouvant être inscrite ou circonscrite aux Polygônes rectilignes. Il est tems de l'examiner comme la borne d'une Figure plane, & comme en formant la Qualité distinctive.

I. Le Cercle, vrai Polygône régulier.

LEs Géométres s'accordent tous à mettre le Cercle dans la Classe des Polygônes réguliers; & ce que nous avons dit dans le premier Livre, le prouve invinciblement. Nous avons établi que la Ligne courbe est composée d'une infinité de Directions, qui changent continuellement sous une raison quelconque. Deux Points la commencent : un troisiéme Point forme une nouvelle Direction : le quatriéme encore une autre; ainsi de suite à l'infini. Donc *toute Courbe est un*

Polygône, ou fait partie d'un Polygône régulier ou irrégulier, dont les Côtés formés par deux Points, ſont infiniment petits; & dont les Angles ſont égaux à deux droits, moins la valeur d'un ſupplément infiniment petit, formé par une Direction & le prolongement d'une autre.

Mais la Courbe circulaire eſt la ſeule où les changemens de Direction ſe ſuivent toujours ſous la même raiſon, & forment les mêmes Angles. Auſſi nous l'avons vûe tourner uniformément, & toujours à la même diſtance, autour d'un Point intérieur qu'on appelle Centre, juſqu'à ce que ſon dernier Point aille ſe joindre à celui par lequel elle a commencé ſa courſe. Donc *le Cercle doit être regardé comme un Polygône régulier d'une infinité de Côtés.*

Les Géométres parviennent à la même conconcluſion par une méthode très-ingénieuſe. Ils comparent la Circonférence du Cercle au Périmétre des Polygônes inſcrits, & enſuite à celui des Polygônes circonſcrits; & de cette double comparaiſon réſulte la même vérité que la nature de la Courbe circulaire nous avoit déja découverte. Nous allons les ſuivre dans cette diſcuſſion.

I.

Il eſt d'abord indubitable que *la Circonférence du Cercle eſt plus grande que le Périmétre de quelque Polygône inſcrit que ce ſoit.* Car chaque Côté du Polygône eſt, dans le Cercle, Corde d'un Arc correſpondant: autant de Cordes égales, autant d'Arcs égaux. Or la Corde étant une Ligne droite, eſt plus courte que l'Arc,

lequel, en qualité de Courbe, n'aboutit que par un Circuit aux deux extrémités de la droite. Par conséquent, la Circonférence du Cercle surpasse en grandeur le Périmétre de tout Polygône inscrit.

Mais il ne faut pas croire qu'elle les surpasse tous également. Car il est assez manifeste que plus le Polygône inscrit aura de Côtés, & plus son Périmétre approchera de la grandeur de la Circonférence circonscrite. En effet, ayant inscrit dans un même Cercle un Triangle équilateral & un Exagône, il est évident que le contour de ce dernier est plus grand & plus approchant de la Circonférence que celui du Triangle. Car à chaque Côté du Triangle répondent deux Côtés de l'Exagône, lesquels pris ensemble, sont plus grands qu'une seule Ligne droite qui leur sert de Base. Par la même raison, un Dodécagône inscrit dans le même Cercle auroit un Périmétre encore plus grand que celui de l'Exagône. Fig. 42.

Pour le prouver d'une maniere encore plus générale, il faut observer que quoiqu'une Corde plus longue soutienne plus de Degrés, il ne faut pas néanmoins juger absolument de la grandeur d'une Corde par le nombre de Dégrés qu'elle soutient dans la Circonférence du Cercle. Le Diamétre en soutient 180. Mais si de ses extrémités A & B, l'on tire deux Cordes égales AD, BD dans la demi-Circonférence, ces deux Cordes, qui prises ensemble, sont plus grandes que le Diamétre, ne soutiennent néanmoins que 180 Dégrés, & chacune n'en soutient que 90, quoique plus grande que la moitié du Diamétre. Fig. 43.

De même, si des deux extrémités de la Corde AD, l'on tire deux Cordes AE, DE, ces deux Cordes plus grandes, prises ensemble, que AD, ne soutiennent comme AD que 90 Degrés de la Circonférence. Donc plus il y aura de Cordes contigues dans un Cercle pour en soutenir les 360 Degrés, & plus la somme totale de ces Cordes aura de grandeur.

Or plus le Polygône inscrit a de Côtés, & plus il y a de Cordes dans le Cercle pour en soutenir les 360 Degrés. Par conséquent, le Périmétre d'un Polygône inscrit est d'autant plus grand que le Polygône a de Côtés.

Fig. 37, 39, 42. Ainsi, le Périmétre d'un Quarré est plus grand que celui d'un Triangle inscrit dans le même Cercle, parcequ'il donne au Cercle quatre Cordes pour en soutenir les 360 Degrés, au lieu que le Triangle n'en donne que trois. Par la même raison le Périmétre du Pentagône est plus grand que celui du Quarré; celui de l'Exagône, plus grand que celui du Pentagône; & ainsi à l'infini. Donc la différence entre la Circonférence du Cercle & le Périmétre du Polygône inscrit diminue à mesure que le nombre des Côtés de celui-ci augmente. Par conséquent, si cette augmentation alloit jusqu'à l'infini, il n'y auroit plus de différence entre l'Arc & la Corde; & le Périmétre du Polygône seroit identifié avec la Circonférence du Cercle. Donc *le Cercle n'est autre chose qu'un Polygône régulier d'une infinité de Côtés.*

2.

Considérons maintenant les Polygônes cir-

conſcrits au Cercle. Il eſt manifeſte que leur Périmétre eſt plus grand que la Circonférence circulaire. Jettons les yeux ſur le Cercle inſcrit dans le Triangle équilatéral avec lequel il n'a de commun que les trois Points X, Y, Z. Pour aller de X en Y, le plus court chemin ſeroit la Ligne droite : on prendroit un Circuit en parcourant le tiers de la Circonférence, c'eſt-à-dire, l'Arc XY. Mais il eſt évident que le détour ſeroit encore bien plus conſidérable ſi l'on ſuivoit les deux Lignes droites XA, AY qui enveloppent l'Arc XY, & qui ſont Angle au Point A. On fera le même raiſonnement ſur le Quarré & ſur tout autre Polygône circonſcrit au Cercle. Ainſi l'on doit établir, que de même que la Circonférence du Cercle ſurpaſſe en grandeur le Périmétre de tout Polygône inſcrit, de même auſſi elle eſt ſurpaſſée par le Périmétre de tout Polygône circonſcrit.

Fig. 44.

Fig. 45.

Nous avons vu que de tous les Polygônes inſcrits, le Triangle équilatéral eſt celui dont le Périmétre eſt plus au-deſſous de la Circonférence du Cercle. La même analogie nous découvre que de tous les Polygônes circonſcrits au Cercle, le Triangle équilatéral eſt celui dont le Périmétre ſurpaſſe davantage la grandeur de la Circonférence inſcrite. En effet, les Côtés du Triangle circonſcrit ne touchant le Cercle que dans trois Points, s'en éloignent beaucoup par leurs extrémités, pour aller former un Angle aigu de 60 Degrés. Au contraire, le Quarré circonſcrit au même Cercle, & le touchant dans quatre Points, ne s'en éloignera pas tant pour

aller former un Angle qui n'est que de 90 Degrés. Le Pentagône qui a cinq Points de commun avec le Cercle, s'en éloigne encore moins pour former des Angles obtus, plus approchans de la Courbure circulaire, que les aigus & les droits. Les Polygônes qui ont plus de Côtés & dont les Angles sont plus obtus, se rapprocheront de la Circonférence encore plus que le Pentagône. Donc *plus un Polygône circonscrit a de Côtés, & moins est grande la différence de son Périmétre avec la Circonférence du Cercle.*

Fig. 45. Pour nous en convaincre encore davantage, suppposons qu'ayant un Quarré circonscrit au Cercle, on circonscrive un Octogône au même Cercle. Une partie des Côtés du Quarré sera commune aux deux Figures; & pour former l'Octogône, il ne s'agira que de tirer une nouvelle Tangente AB, qui retranche du Quarré le petit Triangle isocelle ADB, & de répéter quatre fois la même opération. Or la Ligne AB est plus petite que les deux Lignes AD, BD retranchées du Périmétre du Quarré. Donc le Périmétre de l'Octogône circonscrit est plus petit que le Périmétre du Quarré. Le Périmétre d'un Polygône régulier de 16 Côtés seroit encore plus petit que celui de l'Octogône. Donc *plus le Polygône circonscrit aura de Côtés, & plus son Périmétre se rapprochera de la Circonférence du Cercle.* Donc si cette augmentation de Côtés étoit poussée jusqu'à l'infini, il n'y auroit plus de différence entre le Périmétre du Polygône & la Circonférence du Cercle. Donc enfin, *le Cercle n'est qu'un Polygône d'une infinité de Côtés.*

En réunissant ensemble ces deux comparaisons, il est évident que ce qui rend la Circonférence du Cercle si grande par rapport au Triangle inscrit, & si petite à l'égard du Triangle circonscrit, c'est que ce Polygône n'a de commun avec la Circonférence que trois Points uniques, & que ses Côtés sont des Tangentes ou des Cordes trop longues. Or ces Tangentes & ces Cordes diminuent de longueur, & ont plus de Points communs avec la Circonférence, à mesure que les Côtés du Polygône se multiplient. Donc cette multiplication diminue la différence des deux Figures. Pour les rendre parfaitement égales, il faudroit faire ensorte que le Polygône touchât la Circonférence dans tous ses Points. Or cela ne pourroit arriver que dans la supposition, que les Côtés du Polygône circonscrit fussent des Tangentes infiniment petites, & que ceux du Polygône inscrit fussent aussi des Cordes infiniment petites. Car alors tant les Tangentes que les Cordes se confondroient avec les Directions infiniment petites dont la Ligne circulaire est composée. Donc encore une fois, *le Cercle est un Polygône régulier d'une infinité de Côtés.*

Cette vérité étant aussi-bien établie, on ne doit pas douter que ce qui convient en général au Polygône régulier, ne convienne également au Cercle.

Il suit donc 1°. que le Cercle peut être divisé par ses Raions en autant de Triangles isocelles & égaux qu'il a de Côtés. Ces Côtés infiniment petits, sont les Bases des Triangles qui vont

Liv. II. I. Sect. Chap. IV.

toujours en diminuant jusqu'au Sommet commun, Centre du Cercle. Que l'on juge par-là de la petitesse de l'Angle du Centre formé par les deux Raïons. Néanmoins cet Angle est si réel, que la Totalité de ces Angles du Centre, mesurée par la Circonférence entiere, vaut quatre droits. Chacun de ces Angles infiniment petits, joint à l'Angle de la Circonférence, fait la valeur de deux droits. Cet Angle est encore égal au supplément de l'Angle de la Circonférence formé par le prolongement d'une Direction. Enfin, l'on doit dire que cette infinité de prolongemens des Directions, pris ensemble, sont égaux à quatre Angles droits.

Il suit 2°. qu'il faut distinguer dans le Cercle, ainsi que dans les autres Polygônes réguliers, un double Raïon, l'un oblique & l'autre droit.

L'extrémité de deux Raïons contigus, sont deux Points formant une Direction ou Ligne infiniment petite. Cette Ligne est la Base du Triangle isocelle dont les deux Raïons sont les deux Côtés. Donc ces Raïons sont deux Obliques égales sur la petite Direction. Mais s'ils sont obliques, ils s'écartent également de la Perpendiculaire ou Raïon droit qui doit tomber sur le milieu de la petite Base, & qui certainement est plus court que le Raïon oblique.

C'est ici qu'il faut tenir, s'il est permis de s'exprimer de la sorte, son imagination à deux mains, pour la fixer sur des objets si difficiles à saisir. Il faut concevoir une Base de deux Points contigus pour soutenir un Triangle d'une hauteur assignable, & pouvant croître & décroître

à

à l'infini. Les deux Côtés de ce Triangle ſont deux Raïons obliques dont les extrémités dans leur plus grand écartement ſont deux Points qui ſe touchent. Ces deux Raïons, en remontant vers le Centre, ne ſont pas paralleles : ils empiétent donc ſur leur largeur infiniment petite, pour que leur Sommet ne ſoit qu'un ſeul Point. Ainſi, la Perpendiculaire qu'il faut ſuppoſer entre ces deux Raïons, prend également ſur la capacité de l'un & de l'autre, & le Point qui la termine ſur une Baſe de deux Points, eſt composé de la moitié du Point à droit, & de la moitié du Point à gauche.

Cependant il y a quelque différence de Longueur entre une telle Perpendiculaire & de telles Obliques. Mais quelle différence? Nous avons prouvé que celle qui ſe trouve entre le Raïon oblique & le Raïon droit, fort ſenſible dans les Polygônes réguliers d'un petit nombre de Côtés, diminue par l'augmentation des Côtés. Donc dans un Polygône d'une infinité de Côtés, tel que le Cercle, elle doit être infiniment petite. Mais ce n'eſt pas aſſez dire; car le Raïon droit & le Raïon oblique, tels que nous les avons découverts dans le Cercle, ne peuvent différer de la Longueur d'un Point entier, tout infiniment petit qu'il ſoit. La différence entre ces deux Raïons ne peut donc être que d'un infiniment petit du ſecond Ordre.

Les Géométres n'ont donc pas tort, lorſqu'ils avancent que, dans le Cercle, toute différence entre le Raïon droit & le Raïon oblique diſparoît, & que ces deux Raïons ſe confondent en

un seul. Car la Géométrie ne s'occupant que des Figures dont les Elémens sont des infiniment petits du premier Ordre, doit regarder comme nulle la différence qui résulteroit de l'addition ou de la soustraction d'un infiniment petit du second Ordre. Je m'arrête ici, pour revenir dans un moment plus au long sur cette importante matiere.

2. Rectification de la Circonférence du Cercle.

POur connoître encore plus parfaitement la Circonférence du Cercle, il s'agiroit de trouver une Ligne droite à laquelle elle seroit égale. C'est ce qu'on appelle sa *Rectification*.

Il est facile de donner celle d'un Polygône régulier quelconque. Car ayant une Ligne droite tirée indéfiniment, on y peut appliquer un des Côtés du Polygône, & le répéter autant de fois que la Figure a de Côtés. Mais le Cercle en a une infinité; & chacun d'eux est infiniment petit. Comment trouver sur une Ligne droite la valeur de tous ces petits Côtés réunis ensemble? Après les efforts que les plus habiles Géométres ont fait inutilement pour pénétrer dans ce mystere, il seroit téméraire de vouloir le sonder. La méditation la plus profonde ne peut rien nous apprendre sur ce sujet; & toutes les Lignes subsidiaires que la Régle & le Compas pourroient nous fournir, ne nous conduiroient à aucune découverte.

Ce n'est pas néanmoins la raison générale de Courbure qui s'oppose à la transformation de la Courbe circulaire en Ligne droite. La Géométrie transcendante rectifie des Courbes bien

moins régulieres. Mais jusqu'à présent tous les calculs n'ont pû lui assujettir la Circonférence du Cercle. Nous n'entreprendrons pas de suivre les opérations que l'on a tentées, & d'expliquer ce qu'elles ont de défectueux. Il est triste qu'une Courbe, sans laquelle on ne connoîtroit les autres Figures que fort imparfaitement, soit elle-même aussi peu connue.

Je parle d'une connoissance exacte & fondée sur des idées claires; car d'ailleurs on a trouvé des approximations si justes pour la Pratique, que la Rectification la mieux démontrée ne donneroit pas des moyens plus sûrs d'opérer.

On sçait que le Côté de l'Exagône régulier est égal au Raïon du Cercle circonscrit; & qu'en portant six fois le Raïon sur la Circonférence, l'Exagône se trouve inscrit. Si le Raïon devenu Corde étoit égal à l'Arc de 60 Degrés qu'il soûtient, la Circonférence entiere seroit égale à six de ses Raïons, ou bien à trois de ses Diamétres. Le Diamétre du Cercle seroit donc à la Circonférence comme 1 est à 3. Mais l'Arc étant plus grand que la Corde, il est clair que la Circonférence a plus de Longueur que trois de ses Diamétres mis en une seule Ligne droite. De combien les surpasse-t-elle? c'est ce qu'on ne peut fixer au juste. Mais on a trouvé que le Diamétre est à la Circonférence à peu près comme 7 est à 22. De sorte qu'ayant un Cercle dont on connoît le Raïon, & par conséquent le Diamétre, on déterminera, à peu de chose près, à quelle Ligne droite la Circonférence est égale. Suppo-

sons, par exemple, que le Diamétre soit de dix Pieds, on fera cette Régle de trois:

7. 22 :: 10. X.

En multipliant les deux termes moyens 22 & 10 l'un par l'autre, & divisant le produit par l'Extrême connu 7, on aura au Quotient 31 Pieds $\frac{3}{7}$. Ce sera la Longueur de la Ligne droite égale à la Circonférence.

On a trouvé des approximations encore plus exactes, que le rapport de 7 à 22. Par exemple, celle de 113 à 355 aussi facile à retenir, & sans comparaison plus juste. Mais la Pratique de la Géométrie n'étant point l'objet de cet Ouvrage, nous nous dispensons d'entrer dans un plus grand détail.



LIVRE SECOND.

SECONDE SECTION.

Les Figures planes considérées selon leur Quantité.

JUsqu'ici nous n'avons considéré les Figures que sous une de leurs Dimensions. Les Lignes qui les bornent, ne nous ont donné que des idées de Longueur. Nous allons maintenant y joindre les idées de Largeur, & considérer l'espace que les Surfaces ou Figures planes renferment dans leur enceinte.

Cet espace est le résultat des deux premieres Dimensions de l'Etendue, ou, pour parler plus exactement, de la multiplicité de Lignes collatérales, qui par leur jonction forment une superficie bornée. Car, comme nous l'avons déja dit, les Dimensions sont des attributs métaphysiques, qui supposent l'Etendue toute formée, mais qui ne peuvent contribuer à sa production. C'est le privilége des Elémens. Nous avons conçu les Solides comme un amas de Tranches; les Tranches, comme un amas de Lignes; les Lignes, comme un amas de Points. Mais nous n'avons pas encore approfondi la nature de ces Elémens producteurs. Nous avons craint de décourager les Commençans, en leur présentant des questions trop subtiles. Nous nous sommes même

refusés à des éclaircissemens que la formation des Lignes par les Points, & la considération du Périmétre des Figures planes sembloit demander. Maintenant qu'il s'agit de composer & de mesurer une Etendue réelle, quoique non complette, nous avons besoin d'envisager de plus près la nature des Elémens générateurs. Je ne dois plus craindre d'offrir à mes Lecteurs des vérités trop relevées. Ils doivent être rompus aux précisions de la Géométrie, & familiarisés avec ses Figures. S'ils m'ont suivi jusqu'à présent, ils ne m'abandonneront pas dans la carriere que je vais leur ouvrir.



PREMIERE PARTIE.

De la nature des Élémens de l'Étendue.

CHAPITRE PREMIER.

§. I.

Question importante sur la nature des Elémens.

UN *Tout* est néceſſairement composé de parties; & toute Figure est un *Tout*.

Lorſqu'un Tout est mixte, on cherche à découvrir les divers Elémens qui le constituent; & c'est par la connoiſſance de ces divers Elémens ſimples, que l'on parvient à connoître le Mixte.

Mais lorſqu'un Tout est homogène, ſes Elémens ne peuvent être que des portions plus petites, qui, par leur répétition, forment le composé.

Toute Figure est un Tout de cette derniere eſpéce. Car l'Etendue, comme Etendue, est abſolument de même nature, & ne peut différer que du plus au moins. Par conſéquent, les Elémens d'une Figure ne ſont que des portions d'étendue plus petites que le Tout, qui doit être construit par leur répétition.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. I.

Ces portions sont le *Point*, la *Ligne* & la *Surface*. Car comme nous l'avons expliqué dans le Chapitre préliminaire de cet Ouvrage, les Lignes sont composées de Points; les Surfaces, de Lignes; & les Solides, de Surfaces. Le Point par son mouvement produit la Ligne; la Ligne, la Surface; & la Surface, le Solide.

Il est certain que ces portions élémentaires doivent être d'une extrême petitesse, relativement à l'espace qu'elles doivent former par leur mouvement. Mais on demande si cette petitesse va jusqu'au point d'exclure absolument de l'Elément producteur la Dimension qui semble lui manquer; c'est-à-dire, si le Point est absolument sans Longueur; la Ligne, sans Largeur; la Surface, sans Profondeur. Voilà la Question.

Il sembleroit d'abord qu'il n'y auroit aucun doute pour l'affirmative. Car, dira-t'on, si le Point avoit quelque Longueur, il seroit Ligne: si la Ligne avoit quelque Largeur, elle seroit Surface: si la Surface avoit quelque Profondeur, elle seroit Solide. Cependant nous concevons très-distinctement un Point qui n'est pas Ligne, une Ligne qui n'est pas Surface, une Surface qui n'est pas Solide.

Mais on peut dire d'un autre côté, que les Dimensions de l'Etendue ne sont pas séparables, & qu'une d'entre elles ne peut pas subsister sans les deux autres. Que d'ailleurs il est inconcevable qu'un néant de Longueur produise une Ligne, qu'un néant de Largeur produise une Surface, qu'un néant de Profondeur produise un Solide; parceque du néant répété, il ne peut jamais résulter un être.

La difficulté, comme l'on voit, est pressante; & la maniere dont les Auteurs des Géométries élémentaires s'expriment ordinairement dans leurs livres, ne peut que la fortifier. Car après avoir exclu du Point, toute Dimension; de la Ligne, toute Largeur; de la Surface, toute Profondeur, ils semblent d'autres fois leur donner, dans un degré qu'ils appellent infiniment petit, ces mêmes Dimensions qu'ils leur avoient ôtées.

Des esprits téméraires ont saisi avec avidité cette apparence de contradiction, pour faire naître des doutes contre la certitude de la Géométrie. Cette Science, disent-ils, roule sur des suppositions absurdes: elle ne peut se dispenser d'admettre des Elémens inétendus, c'est-à-dire, des Elémens chimériques dont l'impossibilité est démontrée; & ne pouvant composer ses Figures avec de pareils Elémens, elle est obligée de revenir sur ses pas, & de leur rendre l'étendue dont elle les avoit dépouillés. Mais alors ces prétendus Elémens deviennent inutiles, puisque ce sont de véritables Figures dont il faut encore chercher les Elémens. Les conséquences qui résultent de suppositions si contradictoires ne peuvent être au plus que des vérités hypothétiques, qui n'ont pas plus de réalité que les suppositions mêmes.

Cette difficulté que je présente en gros, peut être diversifiée en mille manieres, & proposée en particulier contre plusieurs des vérités géométriques les plus clairement démontrées. Ce que j'en ai touché fera sentir qu'elle est sérieuse, & qu'il ne seroit pas raisonnable d'entreprendre un

traité de Géométrie, sans réfuter une objection qui paroît sapper les fondemens de cette Science.

Ne nous effrayons pas néanmoins. Cette subtilité roule sur une équivoque, que jusqu'à présent l'on n'a pas démêlée avec assez de soin. Il est évident que la même chose ne peut pas être étendue & inétendue tout à la fois. Si le même Point, la même Ligne, la même Surface réunissent ces deux caracteres, ce sont des Elémens chimériques, & la Géométrie n'est qu'un amas d'absurdités. Mais est-il prouvé que ce soient les mêmes Points, les mêmes Lignes, les mêmes Surfaces à qui l'étendue convient & ne convient pas? ou plutôt, ces Elémens ne pourroient-ils pas être considérés sous un double aspect, sçavoir, dans leur commencement, & dans leur intégrité; dans un état relatif, & dans un état absolu? Ne pourroit-on pas dire que l'étendue qu'ils n'ont pas dans le premier de ces états, leur appartient dans le second? il n'y auroit plus alors de contradiction à craindre; puisque la Géométrie doit envisager les Elémens dans tous les états dont ils sont susceptibles. Approfondissons cette idée: je vais prouver que la Géométrie ne raisonne point sur des suppositions arbitraires; & que les Points, les Lignes & les Surfaces qu'elle employe, ont un fondement inébranlable dans l'essence de l'Etendue bornée.

§. II.

DOUBLE ETAT DES ELEMENS.

1°. *Leur état relatif.*

IL faut se rappeller, que dans une portion d'étendue, que nous appellons une Figure, on doit distinguer l'étendue qui constitue sa substance; & la forme extérieure qui la termine & la caractérise. C'est dans cette distinction que nous allons trouver la solution de la difficulté proposée.

En voyant un Corps, nous sommes plus frappés de sa superficie que de sa solidité; parceque nous voyons la premiere, & que nous ne faisons que juger la seconde. L'imagination produit à peu près le même effet sur nous: & quand même nous nous retirerions dans le plus intime de notre ame pour concevoir une portion d'étendue, nous ne pourrions en avoir aucune idée distincte, que par l'attention que nous donnerions aux Surfaces dont elle est environnée.

Mais ces Surfaces étant des bornes, sont absolument sans épaisseur. Car la Surface d'une Figure est tout à la fois le commencement & la fin de son étendue: le commencement, par rapport à l'espace intérieur: la fin, par rapport à l'espace extérieur qui l'environne. Or le commencement & la fin sont des indivisibles qui ne sont susceptibles d'aucune extension. Car la seconde partie d'un commencement seroit une

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. II.

ſuite ; & la premiere partie d'une fin ne termineroit pas la Figure.

Si deux portions d'étendue, par exemple, deux Cubes d'égale grandeur ſe touchent exactement & ſans intervalle par l'une de leurs Surfaces, il eſt clair que ces Cubes ne ſont unis qu'en raiſon de leur Longueur & de leur Largeur, & nullement en raiſon de leur Profondeur : autrement ils ſe pénétreroient un peu : leur contingence ſeroit une mixtion. Cependant les deux Surfaces ſe touchent dans toute leur étendue. Donc elles n'ont aucune Profondeur.

Mais ces Surfaces elles-mêmes n'étant pas immenſes, ſont terminées par des Lignes. Et les Lignes, comme bornes, doivent, par les mêmes raiſons, être ſans Largeur. Il en eſt de même du Point conſidéré comme borne de la Ligne. Par conſéquent, la Géométrie doit reconnoître des Surfaces ſans Profondeur, des Lignes ſans Largeur, des Points ſans Longueur. Cette ſuppoſition n'eſt point arbitraire : l'idée de l'Etendue bornée en démontre la néceſſité.

Il faut obſerver que ce n'eſt pas ſeulement ſur la ſuperficie d'une Figure que l'on découvre ces Points, ces Lignes & ces Surfaces. On les trouve dans l'intérieur comme dans l'extérieur ; parcequ'il n'y a aucun endroit où la Figure ne puiſſe être partagée par un Plan qui doit être ſans épaiſſeur, puiſqu'il eſt la borne commune des deux parties ſéparables. On peut de même partager une Surface en deux parties quelconques & dans tel ſens que l'on voudra, par une Ligne qui ne peut avoir de Largeur, puiſqu'elle eſt la bor-

ne commune des deux parties de la Surface. Une Ligne enfin peut être coupée où l'on voudra par un Point, qui, comme borne des deux parties de la Ligne, ne peut avoir de Dimension. Dans le fond, tout cela revient au même. Les Points, les Lignes & les Surfaces sur l'extérieur de la Figure sont des bornes actuelles, & des bornes possibles dans l'intérieur. Ainsi, dans l'une & dans l'autre situation, ces bornes conservent toujours leur caractere essentiel de commencement & de fin.

Mais ces Points, ces Lignes & ces Surfaces, en tant que simples bornes, ne sont pas encore des Elémens de l'Etendue. Car ces bornes sont néant, ou de Longueur, ou de Largeur, ou de Profondeur. Or il répugne que ces néans produisent des Longueurs, des Largeurs & des Profondeurs réelles.

D'ailleurs, l'Elément d'un Tout doit avoir une existence propre, une existence indépendante du Tout dont il est partie. Son existence doit être même antécédente à celle du Tout, lorsque par son mouvement il en est le Principe formateur. Mais une simple borne n'a point d'existence propre, & ne subsiste que dans le Tout qu'elle termine. On ne peut l'en séparer, même par la pensée, puisqu'il est essentiel qu'une Etendue bornée commence & finisse, & qu'il répugne qu'une borne existe à part de la substance bornée.

Les bornes ne sont point des portions substantielles de l'Etendue, mais de simples modes extérieurs, qui supposent la substance toute for-

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. I. §. II.

mée, & qui ne peuvent jamais coopérer à sa formation. Ce mode est essentiel au Tout étendu, pour le constituer telle ou telle Figure. Par conséquent, la Géométrie doit considérer les Points, les Lignes, les Surfaces comme bornes, puisque ces bornes distinguent les portions d'étendue qui sont l'objet de ses recherches. Mais alors elle ne les considére point comme Elémens; car un simple mode extérieur ne peut être Elément d'un Tout substantiel.

Comment en effet en seroit-il Elément, puisqu'il ne posséde l'être que d'une maniere imparfaite? Il n'est pas sans doute un pur néant; car les bornes d'une portion d'étendue sont très-réelles; mais il n'est pas non plus un pur être. De ce qu'une Figure a des bornes, il suit que son être commence à la borne, mais aussi qu'il ne commence que là, c'est-à-dire, que la Figure ne posséde pas l'être de l'espace dont elle est environnée. Car la borne, qui termine la Figure, termine aussi l'espace qui ne lui appartient point. La borne désigne donc ce que la Figure est, & ce qu'elle n'est pas: elle exprime son être & son néant. Elle est donc un mélange d'être & de néant; & par conséquent ne peut être regardée comme un Etre absolu, mais seulement comme un Etre relatif.

On ne peut évaluer plus exactement la réalité du Point, de la Ligne & de la Surface entant que bornes, qu'en leur donnant dans l'Etendue la place que le zero tient dans les nombres. Car le zero n'est pas un pur néant, mais la fin & le commencement d'un nombre ou d'une

chose exprimée par un nombre. C'est ce qu'on exprime dans l'Arithmétique, en disant que le zero tient le juste milieu entre les signes positifs & les signes négatifs. On sçait que le signe positif + représente la réalité d'une chose, & le signe négatif — la réalité qui lui manque. Mais la grandeur négative finit précisément où la grandeur positive commence. Par conséquent le terme qui leur est commun ne peut être exprimé que par le zero. De même donc que le zero est un pur néant s'il est seul, c'est-à-dire, s'il est séparé de toute grandeur réelle soit positive soit négative, de même aussi les bornes des Figures seroient de purs néans, si par impossible on pouvoit les séparer d'une portion d'étendue quelconque. Je dis, *par impossible* : Car on ne peut concevoir une borne, un commencement, une fin, sans penser à l'Etre borné, à l'Etre qui commence, à l'Etre qui finit. Donc, selon cette acception, le Point, la Ligne & la Surface ne sont ni portions ni Principes d'Etendue.

Cependant, dira-t'on, la Ligne bornante a une Longueur réelle; & la Surface, une Longueur & une Largeur. Or ce qui posséde une ou deux Dimensions de l'Etendue, en est une partie intégrante.

Je réponds que les Dimensions attribuées aux bornes de l'Etendue, ne leur appartiennent point en propre; puisque les bornes ne peuvent subsister indépendamment de la substance bornée. La Longueur & la Largeur qui paroissent sur la borne, ne sont autre chose que la Longueur & la Largeur de la Figure qui se manifestent sur

les bornes. Car la Figure n'eſt palpable que dans ſes bornes; & ſa Profondeur, c'eſt-à-dire, ſa ſubſtance, ne ſe voit que par l'eſprit. Si la Longueur appartenoit à la Ligne bornante, comme cette Ligne n'a que de la Longueur, on pourroit dire qu'une Dimenſion pourroit ſubſiſter ſans les deux autres : ce qui ſeroit très-abſurde.

Il en eſt de même du mouvement & du repos. Les bornes des Figures n'ont ni l'un ni l'autre en propre; mais elles participent au mouvement & au repos des ſubſtances bornées, qui ne peuvent être mûes ou reſter dans le même lieu, ſans que les bornes ſuivent le même ſort.

§. III.

ETAT POSITIF DES ELEMENS.

LEs Elémens ne peuvent véritablement mériter ce nom, qu'en paſſant à l'état poſitif, c'eſt-à-dire, en acquérant une ſorte de conſiſtance, qui les rende ſéparables de leur Tout, & capables de le produire par leur mouvement. Or, cela ne peut s'exécuter qu'en entamant tant ſoit peu l'Etre même de la Figure. Car une ſimple borne ne peut, même par la penſée, exiſter hors de ſon ſujet.

Ainſi, pour détacher la Surface d'une Figure, il faut ſuppoſer qu'on enleve quelque peu de la Profondeur du Solide. Alors la Surface transformée en *Tranche*, préſente à ſon tour une double Superficie : l'une par laquelle elle regardoit

l'eſpace extérieur : l'autre par laquelle elle touchoit à ce qui reſte de la Figure totale.

De même, ſi de la Tranche on veut ôter la Ligne bornante, il eſt beſoin d'entamer la Largeur de la Surface. Alors la Ligne ſera transformée en *bande* par rapport à la Surface, & en *barre* par rapport au Solide.

Enfin, ſi de la Ligne on retranche le Point, il faut entamer la Longueur : & le Point doué d'une exiſtence propre, ſera une petite Ligne, une petite Surface, un petit Solide par rapport à la grande Ligne, à la grande Surface, au grand Solide.

Je ſens que ce langage effarouchera peut-être quelques perſonnes qui n'ont pas aſſez médité ſur ces principes fondamentaux de la Géométrie. Des Points ſolides, dira-t'on! des Lignes larges! des Surfaces profondes! quelle nouveauté!

Ce ſeroit aſſurément plus que de la nouveauté, ſi l'on accordoit ces propriétés aux Points, aux Lignes & aux Surfaces, lorſqu'on les enviſage comme de ſimples bornes. Mais je prie qu'on faſſe attention que la nature d'un Elément eſt d'avoir une exiſtence propre, une exiſtence antécédente au Tout qu'il doit produire par ſon mouvement. Donc l'Elément a quelque choſe de ſubſtantiel, & n'eſt pas une ſimple modalité.

Or cette petite ſubſtance eſt néceſſairement étendue. Car il eſt impoſſible qu'une portion d'Etendue ſoit compoſée de parties inétendues : il eſt impoſſible qu'un Etre inétendu ſoit ſuſceptible du mouvement local : il eſt impoſſible

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. III. Fig. 1.

qu'un néant de Longueur, de Largeur & de Profondeur produise une Longueur, une Largeur, une Profondeur. En un mot, des zeros répétés ou multipliés ne feront jamais une grandeur réelle.

Arrêtons-nous au Point le premier & le plus simple des Elémens. Supposons, par exemple, que le Point A de notre Cube existe seul avant la Figure qu'il doit former. Ce Point appartient à la Ligne AB, à la Ligne AC, à la Ligne AD, & pourroit appartenir encore à d'autres Lignes. Or il est évident que le côté de A qui touche le second Point de la Ligne AB, n'est pas le même que celui qui touche le second Point de la Ligne AC ou de la Ligne AD.

Prenez tel Point qu'il vous plaira: supposez-lui toute la petitesse que vous pourrez imaginer: ne lui laissez que la réalité nécessaire pour n'être pas un pur néant; il sera toujours vrai que la partie de ce Point tournée vers le Ciel, n'est pas la partie qui regarde la terre; que la partie orientale n'est pas l'occidentale. Ce Point suspendu dans le Vuide peut être le Centre de réunion d'une infinité de Lignes, qui toutes auroient des Directions différentes, & qui par conséquent toucheroient autant de côtés différens du Point central. Or tout ce qui a des parties distinctes, est réellement étendu.

Ce raisonnement s'applique de lui-même aux Lignes & aux Tranches élémentaires. Ces Lignes ont deux flancs: un par lequel elles touchent l'intérieur de la Surface; & l'autre par lequel elles répondent à l'espace extérieur. Les

Tranches ont de même deux faces; & ce qui touche l'une ne touche pas l'autre. Que l'on diminue tant que l'on voudra la Largeur de la Ligne & l'épaisseur de la Tranche: tant qu'elles ne seront pas anéanties, la Ligne aura toujours ses deux flancs, & la Tranche ses deux faces.

Après cet éclaircissement, les adversaires de la Géométrie oseront-ils encore avancer que cette Science ne roule que sur des suppositions absurdes & contradictoires? Des Surfaces sans Profondeur, des Lignes sans Largeur, des Points sans étendue ne sont nullement des chimeres; les Figures les exposent sensiblement à nos yeux, puisque toutes ont un commencement & une fin. L'absurdité consisteroit à regarder ces bornes comme des parties élémentaires; & c'est ce que la Géométrie n'enseigne pas. Pour les rendre Elémens, elle les tire de l'état de simple borne: elle leur donne quelque consistence, pour les considérer à part, avant que de les employer à la construction des Figures. Elle ne peut se dispenser d'envisager les Elémens sous ce double point de vûe. Car elle ne feroit pas suffisamment connoître les portions d'étendue qui sont l'objet de ses recherches, si contente d'examiner ce qu'elles ont de substantiel, elle ne considéroit pas leur extérieur & les bornes qui les circonscrivent & les caractérisent; ou si fixée à ces bornes, elle négligeoit d'envisager les Principes constitutifs de la substance des Figures. La Géométrie ne se contredit donc pas en donnant ou en refusant à propos de l'Etendue à ses Points, de la Largeur à ses Lignes, & de la Profondeur à ses Surfaces.

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. I. §. III.

Tout l'embarras vient de ce qu'on est en quelque sorte obligé de les désigner par les mêmes noms dans les deux états, quoique dans le fond rien ne différe davantage qu'un mode & une substance. J'avoue que c'est un inconvénient, & qu'il est important d'y remédier autant qu'on le peut. Mais il est difficile de changer le langage reçu, sur-tout lorsqu'il est fondé en raison. En effet, l'être d'une Figure commence à sa superficie ; & pour peu qu'on pénétre dans l'intérieur, ne fût-ce qu'infiniment peu, la borne devient partie substantielle du Tout. Ainsi, l'Elément n'est proprement que la modalité extérieure, à laquelle on donne quelque consistence.

Néanmoins pour éviter les équivoques, je substituerai le mot de *Tranche* à celui de *Surface*, lorsqu'il s'agira du troisiéme Elément de l'Etendue; parceque Surface désigne trop clairement la simple superficie.

La Ligne, second Elément, pourroit être appellée *Bande* ou *Barre* : *Bande*, par rapport à sa Largeur : *Barre*, par rapport à sa Profondeur. Mais comme ces termes paroîtroient barbares en Géométrie, je conserverai le nom de *Ligne* en y joignant l'épithéte *Elémentaire*, lorsqu'on pourroit s'y méprendre.

J'en userai de même par rapport au *Point*, ne trouvant aucun autre nom qui lui convienne dans sa qualité de premier Elément. Et pour plus grande précaution, j'appellerai *Point mathématique* & *Ligne mathématique* les deux premiers Elémens considérés dans leur état relatif. Car quoique le Point & la Ligne *élémentaires* soient

aussi l'objet des *Mathématiques*, l'usage a consacré cette dénomination aux Points sans étendue, & aux Lignes sans Largeur.

§. IV.

Les Elémens de l'Etendue sont signes des Dimensions.

IL résulte de ce que nous avons établi dans le Paragraphe précédent, que toutes les fois que la Géométrie considere les Elémens de l'Etendue séparément de leur Tout, ces Elémens doivent être supposés avoir une Longueur, Largeur & Profondeur réelles. Car en les considérant ainsi à part, elle leur donne de la consistence, & leur suppose par conséquent une existence propre & antérieure à celle du Tout qu'ils peuvent former.

Néanmoins, quoiqu'on ne puisse refuser à ces Elémens une étendue complette, on peut souvent négliger leur grandeur réelle en tout ou en partie, lorsque cette grandeur n'influe en rien dans la question dont on s'occupe. Prenons un exemple sensible. On se sert de la toise ou du cordeau pour mesurer la Longueur d'une allée. On sçait fort bien que ces mesures ont une Largeur & une Profondeur. Mais comme ces deux Dimensions ne servent de rien pour déterminer la Longueur de l'allée, on en fait abstraction sans peine ; & l'on considere les mesures comme n'ayant que de la Longueur. Or s'il est

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. I. § IV.

facile de dépouiller par la pensée des objets aussi grossiers que le sont la toise & le cordeau, de deux Dimensions que les yeux nous rendent sensibles, à plus forte raison pourra-t'on en dépouiller la Ligne géométrique qui ne peut avoir qu'une Largeur & une Profondeur excessivement petites.

De même la Géométrie n'envisageant d'abord les Surfaces que comme la réunion de la Longueur & de la Largeur, rien ne l'oblige de s'occuper de leur mince Profondeur, dont la considération ne pourroit que la distraire de son objet.

C'est encore par cette raison que la grandeur d'un Point isolé n'étant souvent d'aucune conséquence, elle l'en dépouille en quelque sorte, & le confond avec ce qu'on appelle le *Point mathématique*, dont il est alors le signe & l'expression.

Il y a plus : je puis avoir égard à quelqu'une des Dimensions d'un Elément, sans avoir égard à toutes. Si, par exemple, j'envisage le Point comme Elément de la Ligne, je dois lui supposer quelque Longueur ; mais je dois faire abstraction de ses deux autres Dimensions qui me sont inutiles. Je lui tiendrai compte de sa Largeur, lorsque je le considérerai comme Elément de la Surface ; & de sa Profondeur, comme Elément du Solide.

De même, la Ligne ne sera *Barre*, que lorsqu'elle influera dans la composition du Solide, & n'est que *Bande* en qualité d'Elément de la Surface.

Mais faire abstraction des Dimensions des Elémens, ce n'est pas les nier; & c'est à quoi l'on n'a pas toujours fait assez d'attention. On s'accoutume à regarder le Point, sans étendue; la Ligne, sans Largeur; la Surface, sans Profondeur; & cela sans inconvénient, lorsqu'il ne s'agit que d'exprimer les Dimensions ou les rapports de Parallélisme, de Perpendicularité ou d'Obliquité que la situation des Elémens peut former entr'eux. Mais il faut avoir égard à leur grandeur réelle, lorsqu'il est question de leurs parties intégrantes, & de ce qu'ils ont de commun dans leur union & dans leurs intersections. On ne peut continuer de supposer le Point sans aucune étendue, la Ligne sans Largeur, la Surface sans Profondeur, sans s'exposer à des méprises. Oserois-je dire que les Géométres ne les ont pas toujours évitées? Citons-en quelques exemples; car il seroit indécent de former une pareille accusation sans la prouver. Ce sera une occasion d'éclaircir des questions que j'ai été contraint de passer sous silence, faute d'avoir établi les principes nécessaires pour les résoudre. Cette discussion qui confirmera la Théorie que je viens de proposer sur la nature des Elémens, en fera sentir en même tems l'utilité & la nécessité.



Liv. II.
II. Sect.
I. Part.
Chap. I.
§. V.

§. V.

PREMIER EXEMPLE.

L'Interſection des Lignes droites.

ON trouve dans tous ou preſque tous les Traités de Géométrie élémentaire la propoſition ſuivante établie comme une vérité fondamentale : *Deux Lignes qui ſe coupent, ne peuvent ſe couper qu'en un ſeul Point.* Car, dit-on, la Direction d'une Ligne droite eſt déterminée par deux Points. Donc, ſi les deux Lignes qui ſe coupent avoient deux Points de commun, elles auroient la même Direction: elles ſeroient poſées exactement l'une ſur l'autre, & par conſéquent ne ſe couperoient point.

Ce raiſonnement ſpécieux impoſe à tous les commençans, & je n'ai vu perſonne refuſer de s'y rendre. Je n'en ſuis pas ſurpris, lorſque la coupe des Lignes eſt perpendiculaire. Car ces Lignes ayant des Directions totalement oppoſées, on conçoit qu'elles n'ont de commun que le moins qu'il eſt poſſible, & par conſéquent un ſeul point. Mais les Lignes obliques n'ayant pas des Directions ſi contraires, & tenant en partie de la Direction parallele, on pourroit ſoupçonner que leur interſection ne ſe termineroit pas ſi bruſquement. Leur rencontre peut être même ſi exceſſivement oblique, qu'elles tiendroient beaucoup plus de la ſituation parallele que de la perpendiculaire.

Je me souviens qu'exposant ma répugnance à celui qui dirigeoit mes premieres études de Géométrie, il me répondit gravement que je ne devois pas juger des Lignes géométriques par celles que je voyois tracées sur le papier; parceque celles-ci, étant toujours un peu grossieres, ne représentoient les premieres que très-imparfaitement. Arrêtons-nous donc à des Lignes purement géométriques, & voyons comment on se tirera de l'épreuve à laquelle je vais les mettre.

Sur le Point D de la Ligne horizontale AB, soit élevée la Perpendiculaire DC. Du Point C soit abaissée l'Oblique CE, de sorte qu'elle soit double de CD. Soient ces deux Lignes coupées par FG perpendiculaire sur CD & oblique sur CE. Je dis que la Sécante FG, qui coupe CD en un seul Point, coupe CE en plus d'un Point. Fig. 2.

Pour le prouver, soient tirées des Paralleles à FG autant qu'il en faut pour couvrir entierement la Perpendiculaire CD & la couper dans tous ses Points. On peut aisément se représenter la suite de toutes ces Paralleles, en imaginant la Ligne AB mue parallelement à elle-même jusqu'au Point C. Il y aura donc autant de ces Paralleles sécantes, que de Points dans la Ligne CD; & ces Paralleles couvriront également la Ligne CE, & la couperont dans tous ses Points. Or CE étant double de CD, le nombre de ses Points est double aussi. Donc chaque Sécante, qui ne coupe qu'un Point dans la Perpendiculaire CD, en coupe la valeur de deux dans l'Oblique CE.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. V.

Pour confirmer cette conclusion par une nouvelle épreuve, soit CE relevée sur le Point E, & devenue, comme CD, perpendiculaire sur AB, mais perpendiculaire double de CB. Alors les Sécantes, qui ne s'élevent pas au-dessus du Point C, ne couvriront plus que la moitié de CE, & ne couperont que la moitié de ses Points. L'autre moitié hors de l'atteinte des Sécantes, n'en sera ni couverte ni coupée. Donc dans son premier état d'oblique, chaque Sécante lui coupoit la valeur de deux Points.

Des Géométres à qui j'ai proposé ces raisons, n'ont trouvé que deux moyens de les infirmer. Les uns me disoient qu'il n'y a qu'un Point de commun à la Sécante & à l'Oblique; mais que cet unique Point est double de celui qui seroit commun à la Sécante & à la Perpendiculaire.

Je répondis que j'y consentois, parceque je ne voulois pas disputer des mots. Mais, ajoutai-je, s'il y a des Points doubles des autres, donc les Points élémentaires ne sont pas sans étendue: donc les Lignes ne sont pas destituées de Largeur; & c'est ce que je voulois démontrer.

D'autres plus subtils me disoient que ma preuve n'étoit concluante qu'à l'égard de mes Lignes élémentaires ausquelles je donnois quelque Largeur; mais qu'elle n'avoit point d'application aux Lignes vraiment mathématiques que je ne pouvois me dispenser de reconnoître aussi-bien qu'eux. Pour trouver ces Lignes mathématiques, ajoutoient-ils, supposons que les quatre Lignes que vous employez, sçavoir, l'Horizontale, la Perpendiculaire, l'Oblique & la Sécan-

ce soient fendues par la moitié selon la Direction de leur Longueur. Les Lignes de séparation seront vraiment mathématiques. Anéantissons donc toutes ces moitiés, les Lignes mathématiques resteront seules; & comme elles sont sans Largeur, la Sécante ne coupera qu'un seul Point indivisible tant dans la Perpendiculaire que dans l'Oblique.

Je répondis qu'on supposoit l'impossible: que les quatre Lignes mathématiques n'étoient qu'une simple borne, une simple modalité qui ne pouvoit subsister hors de son sujet: que par conséquent l'anéantissement des deux moitiés des Lignes élémentaires emporte l'anéantissement des Lignes mathématiques: Qu'en effet on ne peut concevoir une Ligne sans lui donner une existence propre, & par conséquent une existence substantielle qui renferme les trois Dimensions de l'Etendue.

Mais prêtons-nous un moment à l'illusion; & prenons nos quatre Lignes pour Lignes mathématiques. Je vois que mes raisonnemens ont la même application à leur égard. Le même nombre de Sécantes couvre entierément la prétendue Perpendiculaire mathématique & l'Oblique mathématique. Celle-ci est double de la Perpendiculaire. Donc la Sécante mathématique lui coupe la valeur de deux Points. Si l'on vient à relever l'Oblique mathématique sur le Point E, elle ne sera de même couverte qu'à moitié par les Sécantes. Ainsi la substitution de Lignes mathématiques ne remédie à rien. On les suppose mathématiques, & ce sont dans le vrai des

Lignes élémentaires, parcequ'il implique contradiction, que des Lignes réelles & vraiment existentes ne soient que de simples modalités sans sujet.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. V.

Le raisonnement qui séduit les Géométres n'est rien moins qu'une démonstration. Il est aisé d'en faire sentir le défaut. *Deux Points*, dit-on, *déterminent la Direction d'une Ligne droite.* Cela est incontestable. *Donc*, conclut-on, *si la Sécante coupoit l'Oblique en deux Points, elles ne feroient ensemble qu'une seule & même Ligne.* Oui, sans doute, si elle la coupoit en deux Points entiers. Aussi je ne le dis pas; mais seulement que la Sécante couvre la valeur de deux Points. Ces deux assertions sont fort différentes; & c'est de ce qu'on les confond mal à propos, que vient toute la méprise. Ceci a besoin de quelque éclaircissement.

Nos Lignes élémentaires étant supposées avoir quelque Largeur, lorsque la Sécante FG traverse la Perpendiculaire CD, elles ont pour leur Point commun un petit Quarré, qui doit être regardé comme le Point élémentaire des deux Lignes. Supposons donc aussi que l'Oblique CE soit composée d'une suite de petits Quarrés égaux aux Elémens de la Perpendiculaire & de la Sécante. Il est manifeste que la Sécante & l'Oblique ne se coupant qu'obliquement, il n'y aura pas un seul de leurs Quarrés élémentaires qui s'ajuste exactement l'un sur l'autre, & qu'elles n'auront de commun que des portions de plusieurs de leurs Quarrés. Ainsi bien loin d'avoir deux Points de commun, ces deux Lignes n'en au-

vont pas même un ſeul en entier. Mais toutes ces portions de Quarrés jointes enſemble, ſont égales à deux Quarrés élémentaires; puiſque le nombre de ces Quarrés dans l'Oblique eſt double du nombre des Quarrés contenus dans la Perpendiculaire CD; & c'eſt par cette raiſon que l'amas des Sécantes couvre l'Oblique toute entiere, & n'en couvre plus que la moitié, lorſqu'elle eſt devenue Perpendiculaire.

Mais je dois avertir que ce n'eſt que dans ce cas précis, que la partie commune à la Sécante & à l'Oblique équivaut à deux Points. Car il eſt évident que la grandeur de cette partie commune doit varier, ſelon que la Ligne CE ſera plus ou moins oblique. Dans une Obliquité moindre, la partie commune n'iroit pas à deux Points. Elle iroit au-delà, ſi l'Obliquité devenoit plus conſidérable.

On peut même ſuppoſer que deux Lignes ſoient tellement obliques l'une ſur l'autre, qu'elles ſe coupent dans preſque tous leurs Points, ſans néanmoins en avoir un ſeul en entier de commun; & ceci n'eſt pas une ſimple conſéquence des principes que nous venons d'établir: c'eſt une vérité que la Géométrie la plus ſimple nous met ſous les yeux.

On définit la Circonférence du Cercle, *une Ligne courbe dont tous les Points ſont également diſtans d'un Point qu'on nomme Centre;* & cette diſtance eſt, comme l'on ſçait, exprimée par le Raïon, que l'on peut tirer du Centre à tous les Points de la Circonférence.

Suppoſons donc qu'on tire des Raïons ſur

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. V.

deux Points contigus de la Circonférence : ces deux Raïons formeront un Triangle qui n'aura pour Base que les deux Points contigus. Ce sera même là sa plus grande Largeur ; car la Figure remonte en se retrécissant jusqu'au Centre. Les Raïons n'étant donc pas paralleles, & se touchant à leur extrémité, sont obligés de se croiser un peu, & d'empiéter sur la capacité l'un de l'autre, pour se réunir en un seul Point-Sommet. Concevons maintenant les Raïons prolongés, de sorte qu'ils soient deux Diamétres : on aura deux Lignes droites qui se couperont dans tous leurs Points, excepté dans les deux derniers.

Pour se rendre ces interfections sensibles, on n'a qu'à prendre deux bandes étroites de carton d'une égale Largeur, les diviser par Quarrés, les croiser perpendiculairement, & ensuite dans tous les Degrés d'Obliquité. On verra ce qu'elles auront de commun dans leur intersections, & l'on en fera l'application aux Lignes géométriques. Car comme celles-ci ont une Largeur réelle, quoiqu'extrêmement petite, leur Section doit donner une Figure semblable à celle qui résulte de l'intersection de nos Bandes de carton.

C'est par ces principes que l'on doit décider une question que l'on agite quelquefois sur la nature du Point-Sommet de l'Angle. Ce Point appartient également aux deux Jambes qui se réunissent. Ainsi, l'Angle nous présente une véritable intersection, qui seroit complette, si l'on prolongeoit les Lignes au-delà de la réunion.

Par conséquent, si l'on vouloit considérer ces Lignes comme ayant de la consistence, & jouissant d'une réalité plus que modale, il faudroit reconnoître que le Point-Sommet de l'Angle est étendu. Il n'est pas même difficile d'en déterminer la Figure. C'est un Quarré, si l'Angle est droit; & s'il est obtus ou aigu, c'est une Lozange; à la différence que dans l'Angle aigu le grand Diamétre de la Lozange est dans la Direction de la hauteur de l'Angle; au lieu que dans l'Angle obtus, c'est le petit Diamétre de la Lozange.

Ce que je dis ici ne paroîtra nullement singulier, si l'on veut bien faire attention, qu'il y a quelque différence entre considérer un Angle dans son intérieur, & le regarder par son extérieur. Ces deux Points de vûe montrent que les deux Jambes de l'Angle sont une espéce de clôture qui sépare l'espace externe d'avec l'interne; & l'on conçoit dans cette clôture deux faces, l'une qui regarde le dedans de l'Angle, & l'autre qui regarde le dehors. Mais si la Jambe de l'Angle a deux faces, ou plutôt deux flancs, elle a nécessairement quelque Largeur.

Il faut avouer néanmoins que cette Théorie est de peu d'usage. Il est fort-rare qu'en traitant de l'Angle, on soit obligé de penser aux parties intégrantes que les deux Jambes peuvent avoir de commun dans leur jonction. Il n'est question que d'ouvertures de Lignes, & de leur position perpendiculaire ou oblique, toutes choses sur lesquelles la Largeur des Lignes ne peut influer en aucune sorte. On a donc

grande raison de faire abstraction de cette Largeur inutile, aussi-bien que de l'étendue & de la Figure du Point-Sommet, & de ne considérer l'Angle que sous le rapport des Lignes mathématiques, bornes des deux Jambes, soit en-dedans, soit en-dehors.

---

§. VI.

SECOND EXEMPLE.

La Circonférence du Cercle.

SI l'on considere un Cercle par son extérieur, on le voit terminé de toutes parts par une Ligne courbe parfaitement ronde; & cette Ligne qu'on appelle la Circonférence est absolument sans Largeur, puisqu'elle marque l'endroit précis où commence l'être de la Figure, & où il finit par rapport à l'espace extérieur. Aussi cette Ligne n'est-elle qu'une borne, une simple modalité qu'on appelle Rondeur.

Mais lorsqu'on veut détacher cette Ligne de l'espace qu'elle renferme, pour la considérer à part, ne fut-ce que par la pensée, il est impossible de ne pas entamer tant soit peu la capacité du Cercle, pour donner à cette Ligne une existence indépendante du reste de la Figure; sans quoi il seroit absurde de la supposer isolée; puisqu'un simple mode ne peut être conçu séparé de son sujet.

Aussi la Circonférence du Cercle envisagée sous ce point de vûe, présente-t'elle toujours deux

deux bornes distinctes; l'une de convexité tournée vers l'espace extérieur au Cercle; & l'autre de concavité qui regarde le Centre. Diminuez tant qu'il vous plaira la Largeur de cette Courbe, jamais vous ne ferez disparoître ces deux bornes, à moins que vous n'anéantissiez la Circonférence même.

Il est vrai qu'il est souvent inutile d'avoir égard à cette Largeur, qui ne peut être qu'extrêmement médiocre. Alors on en fait abstraction sans aucun inconvénient, & la Circonférence est représentative de la simple borne, que l'on ne peut concevoir sans lui supposer quelque soutien. Mais si l'on s'obstinoit à l'envisager toujours sous ce point de vûe, on risqueroit de tomber dans quelques méprises; car la Circonférence étant souvent regardée comme une Ligne élémentaire, on ne peut se dispenser de lui rendre la Largeur qui lui convient.

Par exemple, on dit tous les jours que l'espace intérieur du Cercle peut être conçu, comme formé par des Circonférences concentriques à la premiere, lesquelles se toucheroient sans intervalle, & dont le nombre est mesuré par la suite des Points du Raïon CA. Or il est évident qu'un espace aussi réel ne peut être formé par une suite de Lignes qui n'auroient absolument aucune Largeur. Fig. 3.

D'ailleurs, observons que les Circonférences diminuent de grandeur à mesure qu'elles avancent vers le Centre. La seconde est moindre que la premiere, la troisiéme moindre que la seconde, &c. Cependant la seconde touche par

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. VI.

sa borne de convexité toute l'étendue de la concavité de la premiere. Donc la borne de la convexité de la premiere est plus grande que sa borne de concavité. Car si ces deux bornes étoient égales, la convexité de la premiere seroit égale aussi à la convexité de la seconde; & la seconde ne seroit pas moindre que la premiere: ce qui seroit absurde. Mais s'il n'y avoit point de Largeur dans la premiere, ses deux bornes seroient absolument égales. On fera le même raisonnement en comparant la troisiéme Circonférence à la seconde, & ainsi de suite; & l'on conclura qu'on ne peut en faire des Elémens du Cercle sans leur accorder une Largeur quelconque.

Cette considération nous met à portée d'examiner avec plus d'exactitude que nous n'avons pû faire jusqu'à présent, quels sont les Points élémentaires de cette Courbe. Lorsque nous avons entrepris de la construire par le mouvement du Point A qui change sans cesse de Direction, nous avons fait abstraction de la Figure particuliere qu'il convenoit de donner à ce Point, parcequ'il ne s'agissoit alors que de concevoir nettement la différence de la Ligne courbe & de la droite. Mais à présent que nous envisageons la Courbe circulaire toute construite, il est naturel de rechercher la forme de ses Elémens.

Comme cette Courbe est parfaitement réguliere, il est clair que ses Points élémentaires doivent être uniformes & de même grandeur. Par conséquent, il faut en exclure les Points quar-

rés, qui joints ensemble exactement ne peuvent donner qu'une Ligne droite; & de même les Points ronds, qui en se touchant, laissent en en-haut & en en-bas des vuides triangulaires.

La Ligne circulaire doit être conçûe comme un Cordon de voute parfaitement régulier. Or pour construire cette voute, il faudroit des pierres égales, taillées en forme de Trapézes, dont les deux Côtés non paralleles seroient également inclinés en sens différens. Nous ne nous tromperons donc pas en donnant cette Figure aux Points de la Ligne circulaire. La suite des grands Côtés paralleles formera la borne de convexité; & la suite des petits Côtés paralleles, celle de concavité.

Tâchons d'arriver au même but par une voie plus géométrique & plus sçavante. Le Cercle est un Polygône d'une infinité de Côtés. Comparons-le aux autres Polygônes réguliers, & voyons ce qui en résultera.

Le Côté d'un Polygône régulier quelconque est une Ligne droite, qui doit avoir une Largeur réelle, quoiqu'extrêmement étroite, lorsqu'on la considere isolée du reste du Polygône. Si nous supposons cette Ligne droite composée de Points quarrés, il est certain qu'elle ne peut être terminée par un Quarré entier, mais par une portion quelconque d'un Quarré coupé plus ou moins obliquement. Car il faut que le Côté du Polygône fasse Angle avec les deux Côtés voisins, qui par conséquent doivent aussi lui présenter, non le flanc d'un Quarré entier, mais une section d'un Quarré pareil, coupé avec la même obliquité. Fig. 4.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. VI.

Il suit de-là que la borne de convexité d'un Côté de Polygône est un peu plus longue que la borne de concavité; & comme ces deux bornes sont paralleles, & que les deux petites Lignes qui terminent les deux bouts du Côté sont également obliques en différens sens, de l'assemblage de ces quatre bornes il résulte un Trapéze aussi régulier qu'il se puisse.

En supposant les petits Quarrés extrêmes coupés selon leur Diagonale, les Côtés venant à se joindre formeront un Angle droit; & les deux moitiés de Quarrés en feront un entier. Par conséquent, le contour du Polygône quarré ou du Parallélogramme rectangle ne sera qu'une répétition de Points quarrés, sans qu'on soit obligé d'y faire entrer des Points ou des portions de Points de différente figure.

Mais s'il s'agissoit d'un Triangle équilatéral, il faudroit que les deux bouts des Côtés qui doivent se joindre pour faire un Angle aigu, fussent coupés par-delà la Diagonale du dernier Quarré, & que la section empiétât sur le Quarré qui précéde.

Au contraire, l'Angle étant obtus dans le Pentagône régulier, la section des deux Quarrés extrêmes doit se trouver en-deçà de la Diagonale. Et comme les Angles deviennent de plus en plus obtus à mesure que le Polygône régulier a plus de Côtés, la Section des Quarrés extrêmes devient aussi moins oblique, & par conséquent entame moins la substance de ces Quarrés.

Il suit de-là, que quoique le Côté de tout Po-

lygône régulier soit toujours un Trapéze, la différence entre les deux bornes paralleles, qui n'est jamais plus considérable que dans le Côté du Triangle équilatéral, diminue par gradation à mesure que le Polygône acquiert de Côtés. Or le Cercle est un Polygône d'une infinité de Côtés : donc le Côté de ce Polygône est un Trapéze infiniment petit, dont les deux bornes paralleles ne différent entre elles que d'une grandeur plus qu'infiniment petite, & dont les deux autres bornes non paralleles sont deux petites obliques égales, qui ne différent que très-infiniment peu de la Perpendiculaire.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. VI.

On conçoit parfaitement que deux Trapézes de cette nature, venant à se joindre par leurs Obliques, doivent former un Angle infiniment obtus ; & qu'à force d'en ajouter de pareils, on construira une voute circulaire infiniment mince, dont la borne de concavité sera tant soit peu moins grande que celle de convexité.

Fig. 8.

Et comme la Capacité du Cercle est remplie de semblables voutes concentriques & contigues, qui vont toujours en diminuant jusqu'au Centre, il faut concevoir que la Largeur de chacune diminue aussi dans la même proportion, aussi-bien que leurs Trapézes élémentaires, dont le grand Côté parallele est égal au petit Côté du Trapéze qui lui répond dans la voute supérieure.

Cette suite de voutes concentriques, depuis la plus éloignée jusqu'au Centre, nous offre un moyen de perfectionner nos idées sur la nature du Raion du Cercle. Jusqu'à présent nous nous

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. I. §. VI.

le sommes représenté comme une espéce de barre uniforme, dont le Point central est le premier Elément. Cette supposition n'a rien d'absurde; car dans le champ de l'Etendue il est permis de tailler des Lignes & des Figures à son gré. Il est même nécessaire de considérer souvent le Raïon sous ce point de vûe. Car la grande utilité du Cercle étant de mesurer les Angles, les jambes de ceux-ci qui doivent être d'une Largeur uniforme, sont censées Raïons du Cercle.

Mais en supposant que l'on tire des Raïons de cette espéce à tous les Points de la Circonférence, il est impossible que ces Raïons n'empiétent pas les uns sur les autres, ainsi que nous l'avons déja remarqué. Car autour du Point central, on ne peut arranger plus de quatre Points pareils. On ne pourroit donc tirer sans confusion que quatre Raïons, qui seroient deux Diamétres perpendiculaires. Par conséquent, si l'on en tire un plus grand nombre, ils empiéteront les uns sur les autres; & si l'on en tire une infinité, ils empiéteront infiniment.

Mais il y a un moyen d'éviter cette confusion. C'est de regarder le Raïon comme la file de tous les petits Trapézes des voutes circulaires, depuis le Centre jusqu'à la Circonférence la plus éloignée. Car ces Trapézes n'empiétent point sur leurs voisins.

Le Raïon considéré sous ce point de vûe, ne seroit plus une simple Ligne droite, mais un véritable Triangle dont la Base seroit infiniment petite, & dont le Sommet ne seroit pas le Point-

central du Cercle, mais le Centre de ce Point.

Il en résulteroit un avantage, qui seroit de simplifier les Elémens de l'espace circulaire. Car cet espace peut être conçu comme un amas de Circonférences concentriques & contigues, ou comme un amas de Raïons. Or les Elémens de ces Lignes si différentes seroient les mêmes Trapézes, rangés sans vuide & sans confusion.

§. VII.

TROISIÉME EXEMPLE.

Les Tangentes à la Circonférence.

J'Ai déja parlé des Tangentes dans le Livre précédent Chap. II. §. II. & je me suis contenté d'exposer ce qu'on trouve sur ce sujet dans les Elémens ordinaires de Géométrie.

La doctrine qu'on y établit se réduit à quatre propositions qu'il est nécessaire de rappeller ici.

1. *Une Tangente, c'est-à-dire, une Perpendiculaire sur l'extrémité du Raïon du Cercle, ne touche la Circonférence qu'en un seul Point.* Fig. 6.

2. *On ne peut faire passer aucune Ligne droite entre le Cercle & la Tangente.*

3. *On en peut faire passer une infinité de circulaires, qui ne toucheront la Tangente qu'en un seul Point.*

4. *Toutes ces Lignes circulaires ne se toucheront non plus qu'en un seul Point.*

Deux observations générales se présentent d'abord.

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. I. §. VII.

1. Après ce que nous venons d'établir sur l'intersection des Lignes droites, on doit se défier des preuves sur lesquelles on appuye ces quatre propositions : car c'est toujours la même équivoque qui regne. *Si la Tangente & la Circonférence avoient*, dit-on, *plus d'un Point de commun, elles en auroient deux. Or elles ne peuvent en avoir deux. Donc, &c.* Mais sans avoir deux Points entiers de commun, ne pourroient-elles pas avoir un Point & plusieurs portions de Points?

2. Les Géométres disent que le Cercle est un Polygône régulier d'une infinité de Côtés. Par conséquent, la Tangente pourroit toucher la Circonférence dans toute l'étendue d'un de ces petits Côtés, c'est-à-dire, en deux Points; car il en faut autant pour faire une Direction, ainsi que nous l'avons expliqué au commencement du premier Livre. Il est vrai que la Tangente ne seroit pas alors perpendiculaire sur l'extrémité du Raïon oblique du Cercle, mais seulement sur l'extrémité du Raïon droit. Je remarque ceci en passant, sans prétendre en faire un chef d'accusation. Car un Côté infiniment petit peut bien passer pour un Point, & principalement si ce Côté est regardé comme un de nos Points-Trapézes, que nous avons dit être l'Elément de la Ligne circulaire. Il faudroit donc dire pour s'exprimer avec plus d'exactitude, que la Tangente ne peut avoir de commun avec la Circonférence, qu'une seule Direction.

Après ces observations préliminaires, j'entre dans une discussion plus profonde; & pour y

procéder avec ordre, je distingue deux situations de la Tangente par rapport au Cercle. Car on conçoit que cette Ligne peut simplement toucher la Circonférence à l'extérieur; & qu'elle peut aussi avoir un de ses Points incorporés avec un Point de la Circonférence. Dans le premier cas, le Raïon perpendiculaire a toute son étendue lorsqu'il rencontre la Tangente : dans le second cas, le Point de la Tangente est le dernier du Raïon. Dans le premier cas, la Tangente est absolument hors de la Circonférence; le Point A du Raïon n'est pas le Point A de la Tangente; & ces deux Points ne sont unis que par contact : dans le second cas, le Point A de la Tangente est un Point de la Circonférence du Cercle. On pourroit appeller la premiere Tangente, *Tangente extrinseque*; & la seconde, *Tnagente intrinseque.* La premiere est sensiblement représentée par un Plan de marbre poli sur lequel on pose un Globe parfaitement rond. Le Globe & le Plan se touchent tellement sans avoir aucune partie commune, que le premier peut rouler librement sur le second. Il n'en seroit pas de même, si quelque Point de la Surface du Globe étoit confondu avec quelque Point de la Surface du Plan.

C'est pour n'avoir pas distingué ces deux Tangentes, que l'on a donné à l'intrinseque les caracteres qui ne conviennent qu'à l'extrinseque. Nous allons les examiner l'une après l'autre.

TANGENTE EXTRINSEQUE.

I.

La Circonférence d'un Cercle ne peut toucher une Tangente extrinseque que par un de ses Points, ou si l'on veut, par une seule de ses Directions infiniment petites.

Car le Point qui suit cette Direction, en formant une autre qui fait Angle avec la premiere, cette seconde ne peut être couchée sur une Ligne droite, & lui être parallele : autrement la Circonférence du Cercle auroit trois Points rangés dans une même Direction, ce qui est absolument contraire à la nature de la Courbe. La seconde Direction fait donc Angle avec la Tangente, & par conséquent ne la touche point.

La preuve tirée de l'égalité des Raïons du Cercle, est ici dans toute sa force. Car le Raïon étant perpendiculaire sur la Tangente au Point A, ne peut être qu'oblique sur le Point suivant. Donc pour parvenir jusqu'à ce Point de la Tangente, il faudroit qu'il sortît de la Circonférence du Cercle.

Et quand même on concevroit que deux Raïons obliques du Cercle tirés sur une des Directions de la Circonférence toucheroient la Tangente, il est certain qu'un troisiéme Raïon tiré au Point subséquent, y seroit encore plus oblique, & par conséquent ne pourroit arriver jusqu'à la Tangente, sans sortir de la Circonférence du Cercle.

2.

Entre le Cercle & la Tangente extrinseque, on ne peut faire passer d'autre Tangente extrinseque.

Car le Point A du Raïon touchant immédiatement le Point A de la Tangente, il faudroit les séparer pour en introduire un nouveau; & dès-lors la Ligne AB ne seroit plus Tangente.

Mais au-dessus de la Tangente extrinseque, on pourroit faire passer une Tangente intrinseque dont le Point A seroit le Point A du Raïon. Ces deux Tangentes seroient paralleles, & contigues sans intervalle entre elles.

3.

Entre la Circonférence & la Tangente extrinque, on pourroit faire passer une infinité de Lignes Circulaires, qui ne toucheroient la Tangente que dans un seul Point, ou dans une seule de ses Directions.

Car en prolongeant le Raïon AC au-dessus du Centre, tous les Points de prolongement peuvent être le Centre d'un nouveau Cercle, dont le Raïon auroit pour dernier Point le Point A de la Circonférence du premier Cercle. Or le Point A est uni par un simple contact au Point A de la Tangente. Donc le Point suivant de la nouvelle Circonférence doit s'élever au-dessus du Point suivant de la Tangente.

4.

Remarquons que dans le cas de deux ou d'un plus grand nombre de Lignes circulaires extrin-

ſeques à la Tangente, ces Lignes circulaires ſe touchent intrinſequement, puiſque le Point A de la premiere Circonférence eſt commun à toutes les autres.

Mais ſi nous ſuppoſons que d'un Point pris dans le prolongement du Raïon AC, on décrive une ſeconde Circonférence dont le Raïon ait pour dernier Point, non le Point A de la premiere, mais le Point A de la Tangente, cette nouvelle Circonférence intrinſeque à la Tangente, ne toucheroit qu'extrinſequement ſa premiere Circonférence. Car elles n'ont aucun Point de commun, & leurs deux Points A ne ne ſont unis que par le ſimple contact.

D'où il ſuit, que *deux Circonférences qui ne ſe touchent qu'extrinſequement, ne ſe touchent que dans un ſeul Point, ou dans l'une de leurs Directions infiniment petites.*

Car la Courbure des deux Circonférences n'étant pas la même, & celle de la ſeconde étant moins éloignée de la Direction droite, le changement de Direction qui s'y fait doit être moins bruſque que dans la premiere. Par conſéquent, puiſque leurs deux Points A ne ſont unis que par contact, les deux Points qui ſuivent dans les deux Circonférences, ne ſe touchent point du tout.

TANGENTE INTRINSEQUE.

Cette Tangente eſt beaucoup plus importante que l'extrinſeque. La Géométrie conſidére ordinairement cette Ligne comme le prolonge-

ment d'une des Directions de la Circonférence du Cercle.

1.

La Tangente intrinseque ne peut avoir de commun avec la Circonférence du Cercle qu'un seul Point entier, ou plutôt, qu'une seule des Directions infiniment petites de la Circonférence.

Car deux Directions d'une Circonférence font Angle. Or il n'y a point d'Angle dans la suite d'une Ligne droite. Donc deux Directions de la Circonférence ne peuvent se trouver dans la Tangente.

2.

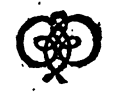
Quoique la Tangente intrinseque & la Circonférence ne puissent avoir de commun qu'un seul Point entier, dans le sens qu'on vient de l'expliquer, elles ont en commun des portions plus ou moins grandes de leurs Points subséquens.

Pour le prouver, supposons que la Tangente intrinseque AB soit prolongée par l'autre côté dans la même Direction, ensorte qu'on ait la double Tangente FA, AB. La Ligne circulaire décrite du Centre C avec le Raïon CA doit venir joindre ce Point A pour se l'incorporer. Elle doit donc le saisir par le flanc, & sortir par l'autre flanc; car si elle ne faisoit que glisser dessus en en-haut, elle ne seroit qu'extrinseque à la Tangente. Mais les flancs du Point A de la Tangente sont déja saisis dans cette Ligne par les Points voisins. Donc pour parvenir au flanc du Point A, il faut que la Circulaire s'enfonce dans le Point qui le précéde, & s'en approprie

une bonne partie. Or elle ne peut prendre une grande portion de ce dernier, qu'elle n'en prenne une un peu moindre dans celui qui le précéde, une un peu moindre encore dans un précédent, & ainsi de suite en rétrogradant jusqu'au Point que la Circulaire ne fait que toucher avant que d'entrer dans l'intérieur de la Tangente.

Il est manifeste que la Circonférence sortant de A, suivra la même route : de sorte qu'il est inconcevable combien la Ligne circulaire s'appropriera de portions de Points dans son passage par la Tangente, sans lui en enlever deux en entier.

Mais si cela est indubitable de toute Ligne circulaire intrinseque à la Tangente, à combien plus forte raison le pourra-t'on assurer de celles dont la Courbure approche plus sensiblement de la Direction de la Ligne droite. Car prenant pour Centre un des Points contenus dans le prolongement indéfini du Raïon AC, on peut décrire une infinité de Circonférences plus grandes les unes que les autres à l'infini, & dont la Courbure décroîtroit à proportion. Or plus ces Circonférences seroient grandes, & plus elles entameroient de portions de Points, avant que d'arriver au Point A qu'elles doivent s'approprier en entier.



3.

Deux ou plusieurs Lignes circulaires de différente grandeur, qui se touchent intrinsequement, ne peuvent avoir de commun qu'un Point entier, ou plutôt une seule de leurs Directions infiniment petites.

La Courbure de la Ligne circulaire est déterminée par trois Points, c'est-à-dire, par la maniere dont le troisiéme Point forme la seconde Direction. Car vû l'uniformité de cette Courbe, il est sûr que les Directions suivantes déclineront comme la seconde a décliné de la premiere. Donc si deux Cercles avoient deux Directions en commun, leur Courbure seroit la même, & les deux Cercles se confondroient.

4.

Mais: *les Lignes circulaires qui se touchent intrinsequement, peuvent avoir en commun une infinité de Portions des Points qui précédent & qui suivent la Direction qui leur est commune en entier.*

Car si la différence de la Ligne courbe & de la Ligne droite n'empêche pas que la Ligne circulaire n'ait une infinité de portions de ses Points communes avec la Tangente, à plus forte raison en doit-il être de même de nos Lignes circulaires. Je dis, *à plus forte raison.* Car la Courbure de ces Lignes étant en même sens, la différence entr'elles doit être infiniment moindre, qu'entre une circulaire & une droite. Par conséquent, si deux Circonférences passent par le Point A de la Tangente, elles s'en dégageront, pendant

qu'elles seront encore mutuellement engagées dans leur propre capacité.

Il est inconcevable comment on a pû s'imaginer, qu'une multitude infinie de Lignes circulaires pouvoient se joindre dans un Point indivisible, sans empiéter en aucune sorte les unes sur les autres. Si deux Lignes circulaires passent par un Point A, les deux Points, qui dans les deux Circonférences précédent immédiatement ceux qui vont se confondre dans un Point commun, doivent, sinon se pénétrer, du moins se toucher sans intervalle. Comment donc une troisiéme Circulaire mitoyenne pourroit-elle arriver jusqu'au Point A? le passage est fermé par les deux bouts qui se touchent dans les deux autres Circonférences. La nouvelle Ligne circulaire, pour arriver jusqu'au Point A de la Tangente, sera donc obligé d'empiéter sur les deux Points unis qu'elle trouve sur sa route. Donc les Lignes circulaires qui ont un Point de commun se toucheroient elles-mêmes en plus d'un Point. Donc les Lignes circulaires, aussi-bien que la Tangente, ne sont pas destituées de toute Largeur.

JE me contente de ces trois exemples, quoique je pusse en ajouter d'autres. Mais en m'y restraignant, j'ai cru devoir leur donner une juste étendue, pour suppléer ce que j'avois omis à dessein en traitant de ces Lignes, tant dans le premier Livre de cet Ouvrage que dans le commencement du second.

Au reste, je prie qu'on fasse attention à la maniere dont j'ai procédé dans toute cette discussion,

cussion. Je n'ai pas dit : les Points ont une étendue réelle ; les Lignes ont une Largeur quelconque. Donc les Circulaires : donc la Tangente : donc les autres Lignes droites se touchent ou se coupent dans plus d'un Point. Mais considérant ces Lignes selon les idées les plus claires de l'Etendue, & revêtues des propriétés que la Géométrie leur suppose nécessairement, j'ai prouvé que dans leur union intrinseque elles avoient plus d'un Point de commun ; & j'en conclus que les Points & les Lignes géométriques considérées comme Elémens, comme ayant une existence propre, ne sont pas dénuées de toute Etendue & de toute Largeur.

CHAPITRE II.

Quelle est la grandeur que l'on doit supposer aux Élémens des Figures.

§. I.

CONSIDERATIONS GENERALES.

SI les Elémens ont une Grandeur réelle, quelle est-elle ? faut-il la fixer ? faut-il la laisser indéterminée ? En un mot, quelle doit être la Longueur d'un Point, la Largeur d'une Ligne, la Profondeur d'une Tranche de Solide ? jusqu'à présent je ne me suis exprimé sur ce sujet que d'une maniere vague. Cette question est im-

portante: il eſt tems de la traiter plus à fond.

Liv. II. I. Sect. I. Part. Chap. II. §. I.

Dans la pratique de la Géométrie, on eſt obligé d'employer des Elémens qui répondent à la groſſiéreté des ouvrages que l'on veut conſtruire. De groſſes pierres cubiques ſervent de Points: des pierres taillées en fragmens de couronne ſeront les Elémens d'une tour ronde. S'agit-il de tracer un grand Quarré ſur le terrein? quatre ſillons ouverts ſuivant la Direction d'un Cordeau tendu en formeront l'enceinte.

Mais quelque ſoin que l'on apporte à la conſtruction de ces Figures, on ſent qu'elles ne peuvent manquer d'être défectueuſes; qu'il y aura toujours quelque inflexion dans ces Lignes prétendues droites, quelque choſe de plus ou de moins dans celles que l'on croit égales. Mais n'importe: ces Figures ſont faites pour les yeux; & les yeux n'apperçoivent pas des différences ſi legéres.

Il faut s'élever au-deſſus des objets ſenſibles. Les *à peu près* n'ont pas lieu dans la Géométrie. Cette Science ne s'occupe des Figures palpables, qu'en tant qu'elles ſont intelligibles; & dans la région des intelligibles, les Figures ſont parfaites. On eſt d'ailleurs obligé de faire abſtraction de la grandeur particuliere que chaque Figure peut avoir, parcequ'on y conſidere uniquement les propriétés qui conviennent à l'eſpéce en général, & par conſéquent aux plus petites comme aux plus grandes. Il faut donc leur ſuppoſer des Elémens aſſez petits, pour qu'ils puiſſent entrer dans la compoſition de toutes celles d'une même eſpéce.

On est souvent obligé de faire abstraction de l'étendue d'un Point, de la Largeur d'une Ligne, de la Profondeur d'une Tranche du Solide. Mais si la solidité du Point est sensible; si la Ligne est une barre massive; si la Tranche manifeste son épaisseur, l'abstraction ne peut être que forcée. Il faut donc concevoir des Points, des Lignes, des Tranches dont l'étendue, la Largeur & l'épaisseur ne puissent être apperçues que par la petite pointe de l'esprit.

J'ai déja conclu de ces considérations que les Elémens doivent être d'une petitesse excessive, inimaginable. (a) Mais ces expressions sont encore trop vagues, puisque l'esprit va bien au-delà de l'imagination. Tâchons de nous en former une idée plus précise.

Lorsque je regarde un objet coloré, je l'apperçois au moyen d'un raïon de lumiere qui part de chaque Point visible. Si je m'arrête au rapport de mes yeux, je regarderai ce Point comme le plus petit Elément de la Surface colorée. Mais si j'examine ce Point avec un excellent microscope, l'atôme se transforme en une vaste plaine, où je découvre avec surprise une multitude innombrable de nouveaux Points visibles. Que seroit-ce donc si je pouvois appliquer

(a) Cette petitesse ne peut avoir lieu, comme l'on voit, que pour les Dimensions dont on a coutume de faire abstraction, c'est-à-dire, pour la Largeur & la Profondeur dans la Ligne; pour la Profondeur seule dans la Tranche élémentaire; & pour les trois Dimensions dans le Point. Car d'ailleurs la Longueur dans la Ligne, la Longueur & la Largeur dans la Tranche peuvent être aussi grandes que l'on jugera à propos.

un microſcope plus fort ſur un de ces nouveaux Points ? voilà la borne de l'imagination.

Les idées claires ſont pour l'eſprit ce qu'une ſucceſſion de microſcopes ſeroit pour les ſens. Dans le ſecond, dans le centiéme, dans le millioniéme Point, j'en apperçois de nouveaux: j'y vois des Lignes : j'y vois des Surfaces. J'ai beau diſſéquer encore ce millioniéme Point, je comprends qu'il m'y reſtera toujours un Point élémentaire ; & que je ne parviendrai jamais au Point mathématique qui n'eſt qu'une ſimple borne.

Où m'arrêterai-je donc dans cette progreſſion infinie? Si je deſcends toujours, je ne trouverai jamais le premier Elément de l'Etendue. Mais ſi je m'arrête, je fixe au Point une grandeur déterminée ; & dès-lors je n'ai pas le premier Elément de toute Figure poſſible ; car ce Point *lui*-même eſt une Figure ſolide, qui doit avoir ſes trois Elémens comme toutes les autres Figures.

Tel eſt l'embarras où jette cette queſtion métaphyſique. Pour s'en tirer, les Géométres ont imaginé divers ſyſtêmes, qui renferment eux-mêmes de grandes difficultés.

Les uns ont dit qu'il falloit creuſer l'idée de l'Etendue, juſqu'à ce qu'on parvînt à trouver des Elémens *indiviſibles ;* que la Ligne eſt compoſée de Points de cette nature ; la Surface, de Lignes inſécables dans leur Largeur ; & le Solide, de Tranches dont la Profondeur n'eſt ſuſceptible d'aucune diminution. Ces Points, ces Lignes, ces Tranches ſeroient de vraies unités

en rigueur métaphysique ; & par conséquent Elémens de toute Figure possible.

Mais j'ose dire que dans ce systême on ne résout la difficulté que par une absurdité palpable. Car ces Elémens sont-ils étendus, ou ne le sont-ils pas ? S'ils sont étendus, ils sont divisibles à l'infini. S'ils sont inétendus, ils ne sont pas Elémens de l'Etendue. Ce seront des Points, des Lignes, des Surfaces mathématiques, des Etres relatifs, de simples bornes ; & nullement des parties intégrantes d'un Tout.

On paroîtroit plus raisonnable en se réduisant à des indivisibles de fait, c'est-à-dire, à des unités fictices dont on s'abstient de considérer les parties substantielles. Mais 1°. on laisse subsister la difficulté dans toute sa force. Car ces *indivisibles* sont dans la vérité des Figures complettes dont il faut chercher les Elémens. 2°. Quoique la Géométrie regarde souvent les Elémens de l'Etendue, comme des indivisibles de fait, il est faux qu'elle les regarde toujours comme tels. C'est ce que nous avons prouvé dans le Chapitre précédent par l'intersection des Lignes tant droites que courbes, dont la Section commune ne contient pas toujours des Points entiers, mais le plus souvent des portions de Points plus grandes les unes que les autres.

La défectuosité trop visible de cette hypothèse, a fait recourir à celle des *infiniment petits* : hypothèse sans comparaison plus lumineuse, & dont par conséquent il est utile de se former des idées précises. Je vais tâcher de l'exposer clairement.

Liv. II. II. Sect. I. Part. Chap. II. §. I.

Lorsque l'on examine une portion quelconque d'étendue, on comprend que tant qu'on lui connoîtra une grandeur constante, elle ne peut être l'Elément commun de toute Figure possible. Car il est clair qu'on pourroit pousser la division plus loin, & qu'on ne s'arrête que par lassitude. Puis donc qu'on doit concevoir les Elémens aussi petits qu'il est possible, il faut tout d'un coup les réduire à l'*infiniment petit*. De cette sorte, le Point premier Elément sera un infiniment petit en Longueur, Largeur & Profondeur : La Ligne, determinée dans sa Longueur, sera infiniment étroite & infiniment mince ; & la Tranche élémentaire avec une Longueur & une Largeur assignables, n'aura qu'une Profondeur infiniment petite.

Fig. 1.

En effet, en considérant le Point A premier Elément du Cube, je m'apperçois aisément que je ne dois lui fixer aucune Longueur. Car si je la déterminois, par exemple, de A en *e*, ce séroit un hazard si le Point *Ae* répété formoit la Ligne AB. Supposons-le néanmoins. Mais s'il me plaît d'allonger cette Ligne AB du demi-quart de la Longueur *Ae*, ce demi-quart de Point deviendra l'Elément de la Ligne AB. Or je peus encore allonger cette Ligne du demi-quart du dernier Point, & ainsi à l'infini, en diminuant toujours dans la même proportion la Longueur du Point élémentaire, jusqu'à ce que forcé d'abandonner toute fixation, je ne lui donne qu'une Longueur infiniment petite, qui le rende Elément commun de toute Ligne possible.

Je procéderai de la même maniere à l'égard de la Largeur de la Ligne AB, & de la Profondeur de la Tranche ABC, qui ne peuvent être Elémens des Surfaces élémentaires & des Solides, tant qu'on supposera à la premiere une Largeur, & à la seconde une Profondeur qu'on puisse assigner.

La difficulté proposée n'est cependant pas encore entierement résolue. Car, dira-t'on, ce Point A, quoi qu'infiniment petit, est une Figure solide dont il faut chercher les Elémens. Les infiniment petits ne sont donc pas les Elémens communs de toutes les Figures possibles.

Les défenseurs du systême ne sont pas effrayés de cette objection. Il suffit, disent-ils, que les infiniment petits soient Elémens communs de toutes les Figures dont la grandeur est déterminable. Il faudra chercher les Elémens de ces Elémens dans des *infiniment petits* d'un second ordre, & les Elémens de ceux-ci dans des *infiniment petits* d'un troisiéme ordre, & ainsi d'ordre en ordre à l'infini, sans qu'on puisse trouver le fond de cet abyme. La divisibilité de l'Etendue l'ouvre sous nos pieds : l'imagination s'en effarouche ; mais le Philosophe doit l'envisager sans frémir.

Lors donc qu'on demande quels sont les Elémens de toute Figure possible, il faut sçavoir de quel ordre de Figures on veut parler ; car chaque ordre a ses Elémens particuliers. Il seroit ridicule, par exemple, d'expliquer la construction d'une Figure infiniment petite du premier ordre par les infiniment petits du vingtiéme ;

puiſque les Elémens de l'ordre immédiatement inférieur ſuffiſent parfaitement.

La Géométrie ne s'occupe guères que des Figures finies, c'eſt-à-dire, de celles dont la grandeur peut être fixée, parceque ce ſont les ſeules qui ſoient à notre uſage, & que nous n'habitons pas dans l'infiniment petit. L'infiniment petit du premier ordre eſt donc le dernier degré de petiteſſe que nous puiſſions donner aux Elémens de nos Figures. La Géométrie eſt quelquefois obligée de deſcendre aux infiniment petits du ſecond ordre; mais rarement juſqu'à ceux du troiſiéme.

La comparaiſon de la Surface colorée que j'ai touchée plus haut, revient ici avec beaucoup de juſteſſe. Les Points viſibles en ſont les Elémens: il ne faut point en chercher d'autres, tant que cette Surface ne ſera que l'objet de nos yeux. Ces Points viſibles répondent aux infiniment petits du premier ordre.

Mais ſi j'obſerve un Point viſible avec un microſcope, ce Point devient pour moi une véritable Surface, où je diſtingue de nouveaux Points viſibles Elémens d'une nouvelle ſuperficie. Voilà les infiniment petits du ſecond ordre.

Si je pouvois appliquer un ſecond microſcope ſur un de ces derniers Points, j'y découvrirois une troiſiéme Surface, dont les Elémens ſeroient des Points viſibles d'un troiſiéme ordre; & je deſcendrois d'ordre en ordre juſqu'à l'infini.

Telle eſt l'hypothèſe des infiniment petits. On ne peut diſconvenir qu'elle ne ſoit très-ingénieuſe. Elle a le double mérite de réſoudre parfai-

tement la difficulté proposée, & d'élever l'esprit à des vûes sublimes sur la nature de l'Etendue. Elle est d'ailleurs si bien liée dans toutes ses parties, que dès qu'on en admet les principes, il faut en admettre les conséquences. Car il est évident que s'il y a des infiniment petits, il y en a divers ordres à l'infini.

On ne peut néanmoins se dissimuler que la réalité de ces *infiniment petits* ne souffre de la difficulté. De grands Géométres la conteitent: d'autres en doutent: preuve certaine de la foiblesse de notre esprit qui ne peut contempler fixement l'infini. Ne faisons dépendre d'aucun systême la certitude de la Géométrie; & si nous en adoptons quelqu'un comme plus vraisemblable, que ce soit toujours en nous renfermant dans les bornes de l'hypothèse. Une hypothèse plausible quoiqu'incertaine, conduit souvent aux connoissances les plus importantes. Celle-ci est le fondement du calcul différentiel; & cela suffit pour en donner une grande idée à ceux mêmes qui ne sçauroient qu'historiquement ce que la Géométrie doit au célébre Leibnitz.

M. Newton a saisi cette hypothèse sous un autre Point de vûe, mais qui revient à peu près au même. Sans examiner si les infiniment petits sont réels ou imaginaires, il les diminue par la pensée, & les conduit pas à pas jusqu'à leur anéantissement. Il remarque leurs propriétés & le changement de leurs rapports dans ces différens passages: il s'arrête au dernier, & saisit la grandeur au moment qu'elle va s'évanouir. Que

les infiniment petits soient réels ou non, la méthode de M. Newton n'en est pas moins sûre. Les découvertes admirables qui en ont été le fruit, le prouvent incontestablement.

La Géométrie ordinaire à laquelle je consacre cet ouvrage n'exige pas que nous pénétrions fort avant dans ces profondeurs. Si donc je parois donner la préférence à l'hypothèse des *infiniment petits*, c'est qu'elle me paroît plus propre qu'une autre à développer mes idées. Qu'on lui substitue si l'on veut celle de l'illustre Anglois, les conséquences en seront toujours les mêmes.

L'essentiel est de ne pas confondre les Elémens avec les Points, les Lignes & les Surfaces mathématiques. Pourvû que l'on donne quelque étendue aux premiers, il importe peu que cette étendue soit plus ou moins grande. En la laissant dans une indétermination parfaite, on rend les Elémens communs à toutes les Figures imaginables. Car si l'on en compare deux de grandeur inégale, rien n'empêche de supposer dans leurs Tranches la même épaisseur, dans leurs Lignes la même Largeur, & la même Longueur dans leurs Points, quelque puisse être cette Longueur, cette Largeur & cette Profondeur.

Mais quoique les *infiniment petits* ne soient pas d'un usage absolument nécessaire dans la Géométrie commune, ils n'y sont pas néanmoins étrangers, sur tout dans les Figures terminées par des Lignes ou des Surfaces courbes. Je crois devoir essayer de le faire sentir par rapport à la Ligne circulaire, la seule Courbe qui soit de

notre ressort. Ce sera moins pour établir une hypothèse, que pour exercer les Commençans, prouver de plus en plus que les Lignes geométriques ne sont pas sans une Largeur quelconque, & perfectionner par ce moyen la Métaphysique de la Géométrie.

§. II.

INFINIMENT PETITS
de divers ordres dans les Lignes circulaires.

NOus avons prouvé par la construction du Cercle, & sur tout en le comparant à tous les autres Polygônes réguliers inscrits ou circonscrits, qu'on devoit le regarder lui-même comme un Polygône régulier d'une infinité de Côtés. Si cette thèse adoptée par tous les Géométres, péche en quelque chose, c'est peut-être parcequ'elle ne donneroit pas encore des idées assez relevées de la Courbure parfaite qui termine cette Figure. Quoiqu'il en soit, nous pouvons sans crainte examiner si le Cercle, transformé sous la forme de Polygône, doit avoir des infiniment petits pour Elémens. Ce seroit bien autre chose, si cette transformation dégradoit la Figure.

Supposant donc que le Cercle n'est qu'un Polygône d'une infinité de Côtés, il suit 1°. que le plus petit Arc d'une grandeur finie contient de même une infinité de Côtés. Car comme il

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. II. §. II.

ne faut qu'un nombre fini de ces Arcs pour composer une Circonférence entiere, celle-ci n'auroit pas une infinité de Côtés, si chaque Arc n'en avoit qu'un nombre fini.

2°. Que chacun des Côtés dont la Circonférence du Cercle est composée, est infiniment petit. Car s'il étoit d'une grandeur assignable, il n'en faudroit pas une infinité pour achever le contour du Cercle. Et d'ailleurs ce Côté d'une grandeur finie pourroit être Corde dans un Cercle que l'on pourroit circonscrire.

Voilà donc les infiniment petits bien constatés par la nature du Cercle. Mais ces infiniment petits sont-ils inétendus ou bien indivisibles? on en va juger.

Ce Côté infiniment petit doit avoir quelque Longueur : autrement il ne seroit pas Côté de Polygône. Sa Longueur est sans doute au-dessous de toute Longueur finie : elle est comme rien. Mais étant infiniment petite, elle est réelle.

Sa Largeur est la même que celle de la Ligne circulaire. Nous avons prouvé que cette Ligne ne pouvoit exister sans en avoir une infiniment petite, puisqu'on ne peut la concevoir sans une borne de convexité, & une de concavité. D'où nous avons conclu que l'idée la plus juste que l'on pouvoit se former du côté du Cercle ou du Point-Elément de la Ligne circulaire, étoit de se le représenter comme un Trapèze infiniment petit, dont les deux Côtés paralleles différoient infiniment peu en Longueur.

Mais une différence infiniment petite dans un infiniment petit, est un *infiniment petit du second*

ordre; & c'eſt de l'amas de ces infiniment petits du ſecond ordre, que ſe forme la différence infiniment petite du premier ordre entre la borne de concavité & la borne de convexité de la Ligne circulaire.

La Circonférence concentrique à la premiere a ſa borne de convexité égale à la borne de concavité de la précédente. Par conſéquent, ſa borne de concavité diminuera encore d'un infiniment petit du premier ordre. Ainſi, ſes petits Trapèzes élémentaires ſeront égaux à ceux de la premiere, à la différence d'un infiniment petit du ſecond ordre. Et comme les Trapèzes des deux Circonférences doivent être des Figures ſemblables, il faut ſuppoſer que la Largeur des ſeconds, & par conſéquent de la ſeconde Circonférence, diminue auſſi d'un infiniment petit du ſecond ordre.

J'en dis autant de la troiſiéme Circonférence & des ſuivantes, qui vont en diminuant de Largeur, juſqu'à ce qu'elles n'en aient plus qu'une infiniment petite du ſecond ordre, enſuite une du troiſiéme ordre & ainſi à l'infini, ſans qu'on puiſſe jamais épuiſer ces ordres, ni trouver un Point fixe où les Circonférences terminent leur diminution graduée; puiſque les petits Trapèzes qu'elles ont pour Elémens diminuant de Longueur à meſure qu'ils s'approchent du Centre, doivent auſſi, comme je l'ai déja dit, diminuer de Largeur à proportion, afin d'être abſolument ſemblables aux Trapèzes ſupérieurs, & former avec eux le Raïon triangulaire dont nous avons parlé plus haut.

LIV. II. II. SECT. I. PART. CHAP. II. §. II.

Toutes ces propriétés conviennent à tous les Cercles d'une grandeur finie quelconque. Ainsi, sans nous embarrasser de suivre dans aucun d'eux la dégradation des Circonférences concentriques, allons tout d'un coup au Point central, qui considéré comme isolé du reste de l'espace du Cercle, & jouissant d'une existence propre, ne peut être qu'un Cercle infiniment petit. Par conséquent sa Circonférence n'aura qu'une Largeur infiniment petite du second ordre; les Trapèzes élémentaires seront aussi des infiniment petits du même ordre; & un infiniment petit du troisiéme sera la différence de leurs bornes paralleles.

On voit ce qu'on doit penser d'un autre Point central infiniment petit du troisiéme ordre, & ainsi des autres à l'infini, sans que jamais on puisse arriver à un Point central qui ne seroit pas un Cercle. Passons à des preuves plus *géométriques*.

Fig. 7. Soit la Circonférence quelconque ABDE.

D'un Point *X* immédiatement au-dessus du Centre C & de l'intervalle *XA*, soit décrite une seconde Circonférence. Il est évident que si l'on acheve le Diamétre des deux Cercles dans la Direction du Raïon AC, l'extrémité *Z* du Diamétre du second Cercle doit être deux Points au-dessus de l'extrémité du Diamétre du premier Cercle, c'est-à-dire, qu'on pourra placer un Point entre *Z* & D. Car le demi-Diamétre *XA* ayant un Point de plus que le Raïon CA, doit s'étendre par son prolongement *XZ* deux Points au-delà de la premiere Circonférence.

Ces demandes ne peuvent être contestées. Je ne suppose ni grandeur ni divisibilité dans le Point central : je le laisse pour ce qu'il est. Mais quel qu'il soit, on ne peut nier qu'il n'y ait un Point de même nature immédiatement au-dessus, & un autre immédiatement au-dessous du Point C. Suivons donc la marche de la nouvelle Circonférence décrite avec ces conditions.

Les deux Lignes circulaires se touchant intrinsequement au Point A, ont ce Point de commun entre elles, ou, si l'on veut, une de leurs Directions, & n'en peuvent avoir plus d'une, comme on l'a prouvé ci-dessus. Mais la seconde Direction de la seconde Circonférence sortira-t'elle entierement de la premiere Circonférence ? Si cela étoit, les troisiémes Directions des deux Circonférences ne se toucheroient plus du tout, pas même extrinsequement : on pourroit placer un Point entre elles : deux entre les quatriémes Directions ; trois entre les cinquiémes, & ainsi de suite jusqu'à ce que la moitié de la seconde Circonférence fût achevée & fût parvenue en Z. Il y auroit donc entre Z & D une infinité de Points ; & cependant par la construction il n'y en doit avoir qu'un seul.

Il est donc impossible que la seconde Direction sorte entierement de la premiere Circonférence ; & je dis la même chose des Directions subséquentes jusques vers le Point B également éloigné de A & de D. Par conséquent, la seconde Direction de la seconde Circonférence ne fera que commencer à quitter le fond de la premiere, la troisiéme s'élevera un peu plus, &

ainsi de suite, jusqu'à ce que la seconde Circon-férence ait fait à peu près le quart de sa cours. Donc ces Circonférences ont quelque Largeur. Je ne suppose rien; mais je conclus. Tout le monde a l'idée de la Circonférence du Cercle & c'est sur cette notion commune que je raisonne.

Mais qui pourroit exprimer l'effrayante petitesse de chaque élévation? La Largeur de la Circonférence est infiniment petite : je ne lui suppose de réalité qu'autant qu'il lui en faut pour n'être pas tout-à-fait anéantie. Et cependant il s'y fait une infinité d'élévations, parcequ'un quart de Circonférence contient une infinité de Points. Donc la grandeur d'une élévation n'est qu'un infiniment petit du second ordre.

C'est vers le Point B que les deux Circonférences commencent à se détacher entierement. Mais les Directions qui suivent ne sont pas éloignées l'une de l'autre d'un Point entier. Car les suivantes s'éloignant encore davantage, il se trouveroit à la fin de la demi-Circonférence une infinité de Points, au lieu d'un seul, entre Z & D. Par conséquent, la premiere Direction qui commence à s'écarter de la premiere Circonférence ne peut s'en écarter que d'une partie infiniment petite d'un Point : & c'est en passant par ces gradations d'infiniment petits du second ordre, que la seconde Circonférence arrivée au Point *Z* se trouvera distante de la premiere de toute l'étendue d'un Point infiniment petit du premier ordre.

Il est inutile de suivre la marche de notre

Circonférenc

Circonférence depuis Z jusqu'en E, & depuis E jusqu'en A. Les approchemens des deux Circonférences doivent suivre en descendant la même analogie, que les écartemens en montant.

Soit encore une autre Circonférence quelconque ABDE.

Soit le Point X, immédiatement au-dessous de C dans le Raion CA, pris pour Centre d'un nouveau Cercle parfaitement égal au premier.

Les Raions des deux Cercles étant égaux, l'extrémité Y du Raion de la seconde Circonférence doit être immédiatement au-dessous du Point A, & le toucher extrinsequement comme X touche C.

Si l'on acheve le Diamétre des deux Cercles, l'extrémité Z du second touchera le Point D extrinsequement, mais en-dedans du premier Cercle, comme Y touche A en-dehors. Suivons maintenant la marche de la seconde Circonférence.

Puisque Z est autant en-dedans du premier Cercle, que Y en-dehors, il faut que la seconde Circonférence rentre dans la premiere, & qu'elle y rentre à moitié chemin vers le Point B. Les deux Circonférences ont donc vers B un Point entier de commun.

Mais pour parvenir à cette union, il est nécessaire que les Points qui suivent Y entrent peu à peu dans la capacité de la premiere Circonférence. Car si depuis A jusqu'en B ils ne touchoient qu'extérieurement ceux de la premiere Circonférence, la seconde seroit plus que mille fois déterminée à toucher extérieurement la pre-

miere dans toute son étendue, & le Point Z se trouveroit au-dessus de D, au lieu d'être au-dessous, ce qui seroit contre la supposition. Donc le Point qui suit Y commence à pénétrer dans la Circonférence du premier Cercle, le second un peu plus avant, & ainsi de suite jusqu'en B. Et comme il y a une infinité de Points ou de Directions depuis Y jusqu'à B, chaque Point de la seconde Circonférence ne pénétre dans la premiere que d'un infiniment petit du second ordre.

En suivant la même analogie, on concevra aisément comment les Points de la seconde Circonférence sortent peu à peu de la capacité de la premiere depuis B jusqu'en Z: comment ils y rentrent de nouveau depuis Z ou D jusqu'en E; & comment enfin ils en sortent une seconde fois depuis E jusqu'en Y ou A.

Je pourrois multiplier de pareils exemples pour établir de plus en plus la divisibilité infinie de nos Elémens. Mais il est tems de quitter ces spéculations abstraites, & de passer à d'autres plus utiles.



SECONDE PARTIE DE LA II. SECTION.

Traité de la Planimétrie.

ON peut aisément partager en classes toutes les Surfaces qu'il s'agit de mesurer.

La premiere classe comprend les Surfaces qui partant d'une Base quelconque, conservent toujours la même étendue sans s'élargir ni se retrécir, & qui par conséquent sont terminées par quatre Lignes dont les opposées sont paralleles. Ces Figures sont les Parallélogrammes tant rectangles qu'inclinés.

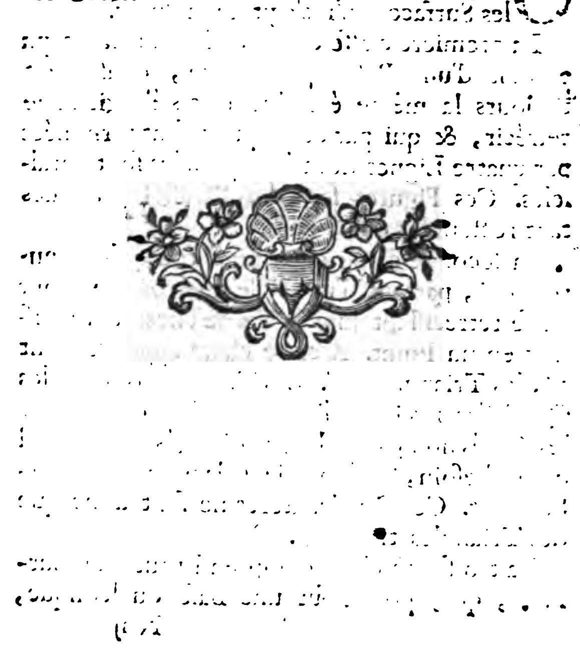
La seconde classe comprend toutes les Figures, qui, partant d'une Base quelconque, vont en se retrécissant jusqu'à ce qu'elles se réunissent en un Point. A cette classe appartiennent 1°, les Triangles. 2°. Les Trapèzes & tous les Quadrilateres irréguliers. Car dans ces Figures les Côtés non paralleles, prolongés autant qu'il en est besoin, se réuniroient dans un seul Point-Sommet. Ces Quadrilateres ne sont donc que des Triangles tronqués.

La troisiéme classe comprend toutes les Surfaces, qui, posées sur une Base quelconque,

LIV. II. II. SECT. II. PART.

s'élevent d'abord en s'élargissant, & finissent ensuite en se retrécissant. Tels sont tous les Polygônes de plus de quatre côtés, tant les réguliers que les irréguliers.

La quatriéme classe comprend toutes les Surfaces terminées par une Ligne courbe. Ces Figures étant des Polygônes d'une infinité de Côtés, on auroit pû les renfermer dans la troisiéme classe. On a déja dit que de toutes les Surfaces bornées par une Ligne courbe, la Géométrie ordinaire ne considere que le Cercle, c'est-à-dire, le Polygône régulier d'une infinité de Côtés.



CHAPITRE PREMIER.

Figures de la premiere classe.

§. I.

Mesure des Parallélogrammes rectangles.

JE commence par le Parallélogramme rectangle, parceque cette Figure est incontestablement la plus aisée à mesurer, & celle qui doit servir à mesurer toutes les autres. L'espace renfermé dans les bornes d'une Figure est le résultat de sa Longueur & de sa Largeur. Mais ces deux Dimensions n'étant pas uniformes dans toutes les Figures, par exemple, dans les Triangles & dans les autres Polygônes de plus de quatre Côtés, par quel moyen y découvriroit-on la combinaison de la Longueur & de la Largeur, si l'on ne pouvoit les rapporter à quelque autre Figure où ces deux Dimensions ne varient jamais.

Rappellons-nous la Figure qui d'abord a fixé notre attention ; ce Cube, où nous avons vû si clairement les trois Dimensions, où nous avons découvert les Elémens qui forment la Ligne, ceux qui forment la Surface, & ceux qui forment la Solidité.

Nous avons apperçu que le mouvement du Point A hors de lui-même décrivoit la Ligne ; Fig. 9.

& que la Ligne AB s'avançant parallelement à sa premiere situation, formoit la Surface ABCD. D'où nous avons conclu 1°, que la Ligne AB étoit un amas de Points semblables au Point A, qui se suivent sans interruption. 2°. Que la Surface ABCD étoit un composé de Lignes semblables à AB posées les unes à côté des autres sans intervalle.

Si la Ligne AB ne s'arrêtoit point dans sa course, jamais on n'auroit de Largeur déterminée. Supposons donc qu'elle s'arrête à une distance quelconque de sa premiere position, la Ligne droite telle que AC, qui mesurera cette cette distance, exprimera la Largeur de la Figure.

Fig. 10. Il n'est nullement nécessaire, comme l'on voit, que la Largeur soit égale à la Longueur. Dès que la Ligne AB s'avance hors d'elle-même, la Surface est formée, soit qu'elle s'arrête endeçà ou au-delà du Point C. Par conséquent, un Parallélogramme rectangle, quarré ou non quarré, exprime parfaitement la réunion des deux premieres Dimensions, & fait voir les Elémens uniformes qui constituent l'aire de la Figure.

Il faut donc connoître la quantité de ces Elémens uniformes, pour juger de l'espace compris entre les limites d'un Rectangle. Or cette quantité est réglée par le nombre, quel qu'il soit, des Points contenus dans la Ligne AC. Car il est évident que toutes les Lignes égales à AB, qui couvrent la Surface du Rectangle, touchent la Ligne AC chacune dans un Point.

Donc il y a dans le Rectangle autant de Lignes AB, qu'il y a de Points dans AC.

D'ailleurs la Ligne AC n'est point étrangere aux Lignes AB. On verra même, en y faisant attention, que cette Ligne AC n'est autre chose que l'amas des extrémités des Lignes AB. Or ces extrémités, prises d'un seul côté, sont égales au nombre des Lignes.

Ainsi l'on voit clairement, que *pour avoir l'aire du Rectangle* proposé, *il ne s'agit que de multiplier l'une par l'autre les deux Lignes qui expriment la Longueur & la Largeur*; c'est-à-dire de prendre autant de fois la Ligne AB, qu'il y a de Points dans la Ligne AC; ou de prendre la Ligne AC autant de fois qu'il y a de Points dans la Ligne AB. Car toutes les deux peuvent être prises indifféremment pour exprimer la Longueur ou la Largeur. On conçoit en effet que la Surface du Rectangle peut être également composée de Lignes élémentaires égales à AC, dont les extrémités seroient dans AB, ou de Lignes AB, dont les extrémités seroient dans AC.

On exprime cette proposition en d'autres termes, en disant, que *la Surface du Rectangle est le Produit de la Base & du Côté*, ou bien, *de deux Côtés qui font Angle*.

Pour avoir encore une idée plus précise de cette mesure du Rectangle, supposons la Ligne AB partagée en Points quarrés contigus. Son mouvement parallele, en formant le Rectangle, le couvrira d'un certain nombre de Points quarrés, qui ne laisseront entre eux aucun vui-

de; & la Ligne AC ne ſera que la répétition du Quarré A de la Ligne AB. Par conſéquent, le nombre de Quarrés contenus dans le Rectangle ne ſera autre choſe que le nombre des Points dont la Ligne AB eſt compoſée, répété autant de fois qu'il y a de ſemblables Points dans la Ligne AC. Ainſi ſuppoſant 200 Points dans AB, & 100 dans AC, l'aire du Rectangle ſera couverte ou compoſée de cent fois 200 Points, c'eſt-à-dire, de 20000.

On voit bien que cette ſuppoſition n'eſt faite que pour fixer l'imagination; car il eſt impoſſible de ſupputer le nombre de Quarrés infiniment petits qui doivent entrer dans la compoſition d'un Rectangle quelconque. Mais pour réaliſer davantage la ſuppoſition, partageons les Lignes AC, AB en parties égales d'une grandeur arbitraire. Soit, par exemple, AC partagée en 3 de ces parties, & AB en 4. Si par les diviſions de AC on tire des Lignes paralleles à AB, le Rectangle total ſera partagé en 3 petits Rectangles dont la Baſe ſera égale à AB, & dont la Hauteur ou Largeur ne ſera que le tiers de AC. Mais ſi par les diviſions de AB on tire des Paralleles à AC, chacun de nos 3 petits Rectangles ſera diviſé en 4 Rectangles égaux, c'eſt-à-dire, en 4 Quarrés, puiſque la Baſe de chacun d'eux eſt égale au Côté. Le Rectangle total ſera donc couvert de 12 petits Quarrés. (Fig. 11.)

S'il arrivoit que les diviſions de la Ligne AC ne puſſent s'ajuſter exactement ſur la Baſe AB, & qu'après y avoir marqué 4 de ces parties, il reſtât une portion quelconque de Ligne, par

exemple, une moitié d'une des parties égales, cela ne formeroit aucune difficulté. Alors outre les 12 Quarrés compris dans le Rectangle total, il y auroit de plus une Bande de trois demi-Quarrés qui termineroit la Figure en BD.

Que l'on fasse après cela de plus grandes ou de plus petites divisions dans les deux Lignes dont la multiplication forme le Rectangle, il en resultera seulement, que la Figure sera couverte d'un plus petit nombre de grands Quarrés, ou d'un plus grand nombre de petits. Mais il sera toujours constant, que *pour avoir la Surface du Rectangle, il faut multiplier la Base par le côté, ou le côté par la Base.*

Je suppose toujours, comme l'on voit, que nos Lignes géométriques ont une Largeur réelle; & nos Points, quelque étendue. Mais pourroit-on supposer le contraire sans tomber dans une absurdité palpable? Comment se pourroit-il faire que des Lignes sans aucune Largeur, formassent par leur répétition une Largeur réelle, & que des Points sans étendue formassent une étendue plus ou moins considérable? Prenons garde que nos Lignes ne sont plus ici de simples bornes, ni de simples expressions de Longueur; ni nos Points, de simples rapports de commencement & de fin, mais que ces Lignes & ces Points sont des portions intégrantes d'étendue.

Qu'entend-t'on en effet, lorsqu'on demande quelle est l'étendue comprise dans les bornes d'une Figure? Aucune portion d'étendue n'est grande ni petite que par comparaison: la grandeur & la petitesse sont des idées relatives. Si

l'Etendue étoit composée d'unités parfaites, indivisibles, inétendues elles-mêmes, on pourroit dire que la quantité d'Elémens de cette espéce contenus dans une Figure, en donneroit la grandeur absolue ; & que les Figures seroient d'autant plus grandes, qu'elles contiendroient davantage de ces Elémens essentiels. Mais, non : l'Etendue exclut de son idée ces unités parfaites. Aucun Point, qui ne soit lui-même l'amas d'une infinité d'Elémens, divisibles eux-mêmes en une infinité d'autres Elémens sans borne & sans fin. Il est donc impossible de mesurer l'Etendue par des *unités*, à moins que ce ne soient des *unités* fictices, qui n'excluent point la divisibilité. C'est ce que nous avons fait en couvrant notre Rectangle d'une infinité de Quarrés infiniment petits. Car quoique les infiniment petits soient susceptibles de plus ou de moins dans leur ordre : quoiqu'ils soient eux-mêmes composés d'autres Elémens infiniment petits du second ordre, les premiers sont néanmoins les unités les plus parfaites, qui puissent entrer dans l'intégration d'une portion d'étendue, dont la grandeur est assignable.

Il résulte de-là que l'on ne peut mesurer un espace que par des espaces plus petits ; & comme ces espaces plus petits sont arbitraires, il est nécessaire que l'on en convienne. Pour aller jusqu'à la derniere précision, nous avons été obligés de recourir à des Elémens infiniment petits. Mais comme il n'y a point de Figure qui n'en contienne une infinité, & que des infinités plus grandes & plus petites sont un océan sans

tive & sans fond, ce seroit en vain que l'on essayeroit dans la pratique de juger de la grandeur d'un espace par l'infinité plus ou moins grande de ces infiniment petits. On a donc été contraint d'avoir recours à des unités fictices d'une étendue plus grossiere. On est convenu de certaines grandeurs fixes, aisées à saisir par la vûe & par l'imagination, ausquelles on a donné les noms de Perches, de Toises, de Coudées, de Pieds, de Pouces, de Lignes. On divise une Base AB & un Côté AC en un certain nombre de Perches, de Toises, &c; & multipliant le nombre des parties égales de la Base par celles du Côté, il en résulte que le Rectangle est composé d'un certain nombre de Quarrés dont chaque Côté est d'une Perche ou d'une Toise pour les grandes Figures; d'une Coudée ou d'un Pied, pour les médiocres; d'un Pouce ou d'une Ligne, pour les petites.

Mais, dira-t'on, puisque ces unités fictices sont d'institution arbitraire, pourquoi leur fixe-t'on la forme quarrée? un Point rectangle-oblong ne pourroit-il pas également entrer dans la composition d'un Rectangle de grandeur finie?

Il le pourroit sans doute, & nous en avons tous les jours des exemples sous les yeux. C'est la forme que l'on donne aux pierres employées dans les bâtimens; & l'on peut faire un Rectangle très-régulier avec ces pierres.

Mais les unités quarrées étant également propres à constituer l'étendue d'un Rectangle, il est évident qu'elles doivent être préférées aux unités oblongues; & cela pour deux raisons.

1°. Pour remplir un Rectangle de Points oblongs, il faudroit diviser la Base & le Côté en parties inégales; car la Longueur du Point oblong seroit plus grande que sa Largeur. Cela se peut sans doute; mais on sent en même tems que cette méthode est peu naturelle, & qu'on ne doit y recourir que dans le besoin, comme par exemple, lorsqu'il est question de sçavoir le nombre de pierres employées dans une couche rectangle d'un massif. Mais lorsqu'on veut seulement évaluer l'espace contenu dans un Rectangle, il est beaucoup plus dans l'ordre de partager en parties égales les Lignes qu'il faut multiplier. Or le produit de ces parties égales donne des Quarrés. Par conséquent, on doit regarder les unités quarrées comme les vrais Elémens du Rectangle.

2°. En fait de mesures, il faut toujours choisir les plus simples, les plus fixes, & les plus aisées à concevoir. Cette raison décide en faveur des unités quarrées. Si l'on dit que la Surface d'un tel Rectangle est de 20 Pieds quarrés; tout le monde entendra ce langage: la Figure du Pied quarré se peint vivement dans l'imagination: une seule Ligne détermine la Figure, parceque tous les Côtés en sont égaux. Mais si l'on disoit qu'un Rectangle est composé de 20 autres Rectangles plus petits, on ne donneroit point d'idée nette de son étendue. Car dans ces petits Rectangles comme dans les grands, les deux Côtés qui font Angle sont inégaux; & cette inégalité peut varier à l'infini. Il faudroit donc spécifier la Longueur & la Largeur de ces petits Rectan-

gles; & malgré cette précaution, on auroit encore de la peine à saisir nettement la forme de ces Surfaces mesurantes.

Pour terminer ce qui regarde le Rectangle, il est nécessaire d'avertir, que comme sa Surface n'est autre chose que le produit des deux Côtés faisant Angle, ces deux Côtés, par la même raison, sont appellés les *Produisans* de la Figure.

Ayant donc deux Lignes quelconques pour former un Rectangle, ces deux Produisans déterminent tellement la Figure, que sa forme & sa grandeur ne peuvent varier. En multipliant ces deux Lignes l'une par l'autre, on connoîtra l'espace que contiendra le Rectangle avant même qu'il soit construit.

Si le Rectangle est un Quarré, ses deux Produisans sont égaux. On peut donc dire qu'il n'en a qu'un, qui multiplié par lui-même, forme la Surface. Cet unique Produisant est appellé *Racine* du Quarré; & la Racine donnée, détermine invariablement la grandeur de la Figure.

---

§. II.

OBSERVATIONS GENERALES

Sur la mesure des Figures planes qui ne sont pas rectangles.

Rien de plus simple & de plus intelligible que la mesure des Rectangles. La Longueur & la Largeur y sont exprimées sans nuage par les deux Lignes du Périmétre qui font Angles

& les deux Produisans s'y montrent à découvert. Aussi se porte-t'on naturellement à choisir cette Figure pour faire des enceintes, à moins que la nécessité ou l'utilité ne déterminent à leur donner une autre forme.

Si la Surface de la terre n'avoit jamais été partagée qu'en Rectangles, la Géométrie seroit long-tems restée dans sa grossiéreté primitive. Quel motif auroit pû porter les hommes à méditer sur la nature & les propriétés des autres Polygônes dont on n'eut point fait d'usage ? La Géométrie est fille du besoin. La nature a tracé les différens Polygônes sur la Surface de la terre ; on a souvent été contraint de les adopter ; la commodité & l'agrément les ont multipliés. Alors il a fallu, pour évaluer l'espace renfermé dans leurs limites, comparer leur grandeur avec l'espace connu des Surfaces rectangles. On s'est d'abord contenté d'en juger par des approximations souvent fautives. Enfin les mécomptes où l'on tomboit journellement, ont imposé l'heureuse nécessité d'approfondir ce qui regarde les diverses portions d'étendue.

En effet, on s'apperçoit aisément que la valeur de l'espace contenu dans un Polygône qui n'est pas rectangle ne saute pas aux yeux. Cet espace est sans doute le résultat de la Longueur & de la Largeur combinées. Mais où trouver ces Dimensions, par exemple, dans un Triangle ? Si l'on prend la Base pour l'expression de la Longueur, quelle autre Ligne sera l'expression de la Largeur ? une Perpendiculaire abaissée du Sommet sur la Base donne la hauteur du Trian-

Fig. 12.

gle. Mais toutes les autres Perpendiculaires à cette Base, sont plus courtes que la Ligne de hauteur, & vont toujours en diminuant, à mesure qu'elles s'approchent des deux Angles inférieurs. Parmi toutes ces Perpendiculaires, quelle est celle qui sera le signe de la Largeur dans la Figure ?

D'ailleurs l'espace Plan est nécessairement le Produit de deux Lignes produisantes multipliées l'une par l'autre. Mais si l'on prend la Base du Triangle pour un des Produisans, quel sera l'autre produisant ? Si l'on multiplioit la Base par la hauteur perpendiculaire, on auroit un Rectangle qui surpasseroit de beaucoup l'espace triangulaire, aux yeux mêmes les moins clairvoyans.

Ce que je dis du Triangle, je le dis de tous les autres Polygônes non-rectangles ; & je n'ai pas besoin d'en faire l'application. Il faudroit donc renoncer à mesurer exactement leur Surface, si l'on s'arrêtoit uniquement à les considérer en eux-mêmes : & telle est la difficulté qui a touché nos peres, & qui les a forcés à méditer profondément sur la nature des étendues bornées. Leurs efforts n'ont pas été vains. Il n'y a point de Figure, pour irréguliere qu'elle soit, à laquelle on ne trouve un Rectangle égal en étendue. Voilà le grand secret de la Planimétrie. Dès-lors toute difficulté disparoît. On trouve avec facilité les deux Produisans de toute Surface, qui ne sont autres, que ceux mêmes du Rectangle qui lui est égal. On trouve les Elémens uniformes qui la constituent ; & l'on dit sans craindre de soutenir un paradoxe, que la

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. I. §. III.

Surface de tel Triangle, par exemple, est de 20 Pieds quarrés : ce qui signifie seulement que cette Surface est égale à celle d'un Rectangle que 20 Pieds quarrés couvriroient exactement.

Le bon sens dicte en effet que l'on doit avoir une mesure commune pour juger de l'espace contenu dans toutes les Surfaces que l'on peut comparer ensemble. Car l'espace est homogène dans toutes les Figures. Quelle confusion, si chaque Polygône avoit sa mesure particuliere. Comment pourroit-on juger de leur grandeur respective ? Il faut donc le fixer aux unités fictices du Polygône, qui seul peut être mesuré par lui-même. Par conséquent, les petits Quarrés deviennent la mesure naturelle de tous les Polygônes, & même de ceux ausquels cette espéce d'Elément paroîtroit le moins convenir.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer les Rectangles égaux à chaque Figure ; & c'est à cette recherche que nous allons nous livrer en examinant chaque espéce de Figures planes selon les classes dans lesquelles nous les avons distribuées.

---

§. III.

Mesure du Parallélogramme incliné.

Fig. 13. & 14. comparées avec les Fig. 9. & 10.

CEtte Figure a tant de ressemblance avec le Rectangle, qu'on seroit tenté de confondre l'espace qu'ils renferment, lorsque les deux Côtés qui font Angle dans l'une & dans l'autre, sont

ſont reſpectivement égaux. En effet, l'on pourroit concevoir le Parallélogramme incliné couvert de Lignes AC ou de Lignes AB égales aux Elémens du Rectangle. Il ſembleroit donc que pour avoir l'eſpace contenu dans le Parallélogramme, il faudroit, ainſi que dans le Rectangle, multiplier le Côté par la Baſe, ou la Baſe par le Côté.

Cette apparence peut encore être fortifiée par un raiſonnement ſubtil. On dira que le Parallélogramme, ainſi que le Rectangle, ſe forme par le mouvement de la Baſe AB ſur le Côté AC, ou du Côté AC ſur la Baſe AB. Que par conſéquent, il faudroit prendre autant de fois la Baſe, qu'il y a de Points dans le Côté; ou le Côté, autant de fois qu'il y a de Points dans la Baſe. Il faudroit donc multiplier l'un par l'autre pour avoir la Surface du Parallélogramme. Or il y a autant de Points dans la Baſe & dans le Côté, que dans la Baſe & dans le Côté du Rectangle, puiſqu'on ſuppoſe ces Lignes reſpectivement égales. Donc les deux Figures renfermeroient le même eſpace.

Les Commençans qui méditent, ont peine à découvrir le faux de ce raiſonnement; & je ne doute point que les anciens Arpenteurs n'en aient été ſouvent la dupe, ſur tout lorſque les Parallélogrammes qu'ils meſuroient étoient médiocrement inclinés ſur leur Baſe. Mais l'expérience les déſabuſa bientôt. On vit qu'une forte inclinaiſon diminuoit ſenſiblement l'eſpace contenu, & qu'on pouvoit abaiſſer le Côté ſur la Baſe à un tel Point, qu'à peine la Figure contien-

droit-elle un espace sensible. Que l'on compare en effet la Figure 15 avec la Figure 10, & même avec la Fig. 14, on sera frappé de la petitesse du Parallélogramme très-incliné, relativement à l'espace renfermé dans le Rectangle 10, & même dans le Parallélogramme 14. Cependant ces trois Figures sont terminées par des Lignes respectivement égales.

Mais sans nous arrêter à cette raison qui ne parle qu'aux yeux, je dis que la marche même de la Base AB sur le Côté AC, montre suffisamment, que pour avoir l'espace contenu, il ne faut pas multiplier ces deux Lignes l'une par l'autre. Je vois que dans cette marche, la Base AB se prête à deux Directions représentées par l'Oblique AC, sçavoir, la Direction parallele à sa premiere position, & la Direction perpendiculaire. Or la marche de AB selon la Direction parallele ne donne qu'un mouvement en Longueur, & ne contribue en rien à la production de l'espace, qui ne s'opere que par le mouvement de la Base selon la Direction perpendiculaire. Donc le Côté AC ne peut être produisant de l'espace qu'autant qu'il tient de cette derniere Direction. Or ce qu'il en participe est exprimé par une Perpendiculaire EF abaissée sur la Base d'un Point quelconque du Côté supérieur. Cette Perpendiculaire mesure la distance où est AB à l'égard de sa premiere position, lorsqu'elle a parcouru l'Oblique AC. Donc l'espace produit par le mouvement de la Base doit être mesuré par la hauteur perpendiculaire, & non par le Côté oblique.

De plus : l'espace résulte de la combinaison de la Longueur & de la Largeur. En prenant donc la Base du Parallélogramme pour l'expression de la Longueur de la Figure, sa Largeur sera-t'elle exprimée par le Côté oblique, ou par la Hauteur perpendiculaire ? Il est manifeste que c'est par cette derniere Ligne. Ayant une Régle ABCD Rectangle d'une Longueur & d'une Largeur quelconque : si par les deux extrémités l'on en retranche deux petits Triangles, & que l'on en fasse un Parallélogramme incliné, jamais il ne viendra dans l'esprit de personne, que par ce retranchement la Régle ait acquis plus de Largeur. Cependant ses nouvelles Limites latérales AE, FD sont plus grandes que les anciennes AC, BD. Donc le Côté AE n'exprime point la Largeur de la Régle dans sa nouvelle situation : c'est toujours l'ancien Côté AC, ou une autre Perpendiculaire équivalente. Par conséquent, pour avoir l'espace de ce nouveau Parallélogramme incliné, il faut multiplier sa Base, non par le Côté oblique, mais par la Ligne de Hauteur perpendiculaire.

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. I. §. III.

Fig. 16.

Ces raisonnemens péremptoires ne laissent aucun doute sur le parti qu'il faut prendre. Il y a donc un Paralogisme dans l'argument subtil, qui semble conduire à une autre conclusion. Tâchons de faire sentir ce qu'il a de défectueux.

Soit la Base AB, le Côté oblique AC, & la Perpendiculaire EF. Si l'on fait mouvoir AB le long du Côté AC, cette Base coupera perpendiculairement EF dans tous ses Points, & touchera obliquement tous les Points du Côté AC. Ainsi,

Fig. 13. & 14.

en ſuppoſant ces trois Lignes partagées en Points égaux, il faudra dire que la Baſe n'aura jamais qu'un Point de commun avec la Perpendiculaire EF; mais qu'à chaque pas elle touchera plus de la valeur d'un Point ſur le Côté AC. En effet, la Baſe AB ayant une Largeur infiniment petite, ne touche point le Côté AC par une Limite perpendiculaire, mais par une Oblique tracée dans ſa propre Largeur, & toujours plus grande que la petite Ligne perpendiculaire par laquelle elle frappe le Côté AC dans le Rectangle. Par conſéquent, en ſuppoſant les trois Lignes AB, AC, EF partagées en Points égaux, c'eſt-à-dire, en Quarrés infiniment petits, il eſt clair que AB qui ne coupe qu'un Point à chaque pas dans la Perpendiculaire EF, en touche la valeur de plus d'un ſur le Côté AC, ainſi qu'il a été expliqué ci-deſſus plus au long.

Il ſuit de-là 1°. qu'il y a moins de Lignes AB dans la Surface du Parallélogramme, que de Points dans le Côté AC; & que par conſéquent la multiplication de AB par les Points de AC donneroit un eſpace plus grand que celui du Parallélogramme.

2°. Que le nombre des Lignes AB eſt déterminé par le nombre des Points de la Perpendiculaire EF plus courte que l'Oblique AC; & que par conſéquent cette Perpendiculaire EF eſt le ſecond Produiſant du Parallélogramme.

Je ne puis m'empêcher d'obſerver encore ici, combien il eſt néceſſaire d'avoir égard à l'étendue des Points & à la Largeur des Lignes géométriques. Les partiſans des Elémens indiviſibles

ne pourroient se tirer du raisonnement subtil par lequel j'ai commencé ce Paragraphe. Car une Base sans Largeur ne touchera jamais en s'élevant qu'un Point indivisible dans le Côté du Parallélogramme, soit rectangle soit incliné. Donc pour avoir la Surface de l'un & de l'autre, il faudra prendre la Ligne AB autant de fois qu'il y a de Points inétendus dans le Côté AC. Cependant il est évident d'une autre part, que dans un Parallélogramme incliné, il faut prendre la Base autant de fois qu'il y a de Points dans la Ligne de Hauteur, puisque la Base en s'élevant ne coupe à la fois qu'un seul Point dans cette Perpendiculaire. On pourroit donc à son choix prendre pour second Produisant du Parallélogramme, ou la Ligne de Hauteur ou le Côté oblique, ce qui est de la dernière absurdité; puisque le Côté oblique a toujours plus de Longueur que la Hauteur perpendiculaire; & d'autant plus, qu'il est plus oblique. Comment ceux qui s'appliquent à l'étude de la Géométrie ne seroient-ils pas ici déconcertés? On leur a toujours dit que le Point étoit inétendu, & la Ligne sans Largeur; & tout d'un coup ils se voyent contraints d'abandonner cette hypothèse, pour n'être pas obligés de regarder le Côté du Parallélogramme oblique comme le second Produisant de la Figure.

Il faut pourtant avouer qu'il le pourroit être en un sens, qui n'est nullement contraire à ce que nous venons d'établir. C'est ce qu'il est besoin d'expliquer pour achever d'éclaircir ce qui concerne le Parallélogramme incliné.

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. I. §. III. Fig. 11. & 17.

Prenons un Rectangle & un Parallélogramme dont les Côtés soient respectivement égaux, tels que sont les Figures 11 & 17. On pourra diviser la Base *ab* en 4 parties égales, & le Côté *ac* en 3 ; & ces divisions seront égales dans les deux Figures. Si par les divisions du Parallélogramme incliné, on tire des Lignes paralleles à la Base & au Côté, la Surface se trouvera partagée en 12 Lozanges égales, comme le Rectangle en 12 Quarrés égaux : & de plus, les Côtés de ces Lozanges ou Rhombes sont égaux à ceux des petits Quarrés. On pourroit donc multiplier la Base *ab* par le Côté *ac*, & le produit donneroit la Surface du Parallélogramme en Lozanges. Le Parallélogramme incliné tient de sa conformité avec le Rectangle le privilége de pouvoir être partagé en Elémens égaux & similaires. Mais chacune de ces Lozanges étant elle-même un Parallélogramme incliné, est plus petite en Surface que le Quarré, quoiqu'elle lui soit égale en Périmétre.

En diminuant de moitié les divisions de la Base & du Côté, le Parallélogramme sera couvert de 48 Lozanges, dont chacune ne seroit que le quart des anciennes. Par conséquent, si cette diminution étoit poussée à l'infini, on pourroit concevoir la Figure, comme remplie de Lozanges infiniment petites.

En ce cas, au lieu de partager la Base *ab* & le Côté *ac* en Points quarrés, il faudroit les supposer partagés en Points lozanges : & dans ce sens, pour avoir la Surface du Parallélogramme, on pourroit multiplier le nombre des Lo-

zanges de la Base par le nombre des Lozanges du Côté.

Mais il faut remarquer 1°. que de-là il ne suit nullement que l'espace du Parallélogramme fut le même que celui du Rectangle. Car quoique le nombre des unités lozanges de l'une des Figures fut le même que celui des unités quarrées de l'autre, chaque unité quarrée étant plus grande que chaque unité lozange, le total des Quarrés donneroit un plus grand espace que le total des Lozanges.

2°. On ne pourroit partager la Ligne de Hauteur perpendiculaire en unités lozanges; car la Base en s'élevant ne peut la couper que perpendiculairement; & par conséquent leur section commune ne peut être qu'un Quarré. Ainsi, la Ligne de Hauteur ne peut être second Produisant du Parallélogramme, qu'en supposant la Base partagée en Points quarrés. Car on multiplie des Quarrés par des Quarrés, & non par des Lozanges.

Tout cela, comme l'on voit, s'accorde parfaitement avec ce que nous avions établi, & surtout avec la divisibilité des Points & la Largeur des Lignes géométriques. Mais il en résulte une difficulté qu'il est à propos d'examiner.

Le Parallélogramme incliné, dira-t'on, peut être couvert d'unités lozanges, & ne peut l'être d'unités quarrées. Ces unités lozanges ne devroient-elles pas être regardées comme la mesure naturelle de la Figure? Il seroit ridicule de mesurer le Rectangle par de petites Surfaces lo-

Liv. II. II. Secт. II. Part. Chap. I. §. III.

zanges qui ne peuvent le couvrir exactement : ne feroit-il pas également ridicule de mefurer le Parallélogramme incliné par de petites Surfaces quarrées qu'on ne pourroit arranger dans fon enceinte ? Si le Côté peut être le fecond Produifant de cette derniere Figure dans le fens qu'on l'a expliqué, ne doit-il pas être préféré à la Ligne de Hauteur, laquelle en quelque façon eft étrangere au Parallélogramme ?

Je voudrois que ceux qui fe donneront la peine d'étudier cet Ouvrage, s'arrêtaffent ici un moment pour trouver d'eux-mêmes la folution de cette difficulté, dont le clinquant ne peut en impofer qu'à ceux qui ne réfléchiffent pas fuffifamment.

Quoiqu'il en foit, il eft aifé de répondre que les unités lozanges feroient fans doute préférables dans ce cas-ci, fi elles avoient, comme les unités quarrées, une grandeur fixe & déterminée. Car comme le Parallélogramme incliné ne renferme pas tant d'efpace que le Rectangle, quoique leurs Côtés foient refpectivement égaux, de même les petites Lozanges contiennent moins d'efpace que les petits Quarrés, malgré l'égalité de leur Périmétre ; & cet efpace eft d'autant moindre, les Côtés reftans les mêmes, que les Lozanges font plus inclinées.

On ne nous apprend donc rien, en nous difant que tel Parallélogramme eft couvert de 12 Lozanges dont le Côté feroit d'un Pouce. Car cette condition ne détermine nullement l'efpace contenu dans la Lozange. Il faudroit la mefurer elle-même par la Ligne de Hauteur per-

pendiculaire, multipliée par la Base. Or une mesure variable qui ne présente rien de fixe à l'esprit, & qui a besoin elle-même d'être mesurée, n'est point une mesure naturelle d'un plus grand espace. Il n'y a donc que les petites Surfaces quarrées qui puissent mesurer exactement le Parallélogramme incliné, ainsi que le Rectangle. Or l'on trouve ces petites Surfaces quarrées en multipliant la Base par la Ligne de Hauteur, qui est d'autant moins étrangere à la Figure, qu'elle seule en exprime la véritable Largeur.

Par le moyen de ces deux Produisans, la mesure du Parallélogramme incliné, ne souffre pas plus d'embarras que celle du Rectangle. Car on sçait d'abord que cette Figure *est égale en espace au Rectangle de même Base & de même Hauteur*, c'est-à-dire, au Rectangle qui auroit pour Base celle du Parallélogramme incliné, & pour Côté, la Ligne de Hauteur du Parallélogramme. Cette vérité est si essentielle, qu'on me permettra d'en apporter quelques preuves directes. Elles seront une nouvelle confirmation de ce qui a déja été établi dans ce Paragraphe.

I.

Soit un Parallélogramme incliné quelconque ABCD. Du Point C soit abaissée sur la Base une Ligne perpendiculaire CE, & du Point D une autre Perpendiculaire DF sur la Base prolongée. Par le moyen de ces deux Perpendiculaires tirées dans un espace parallele, on a le Rectangle EFDC de même Base & de même Hauteur Fig. 18.

que le Parallélogramme : *de même Base* ; car la Base EF comprise entre les deux Perpendiculaires est égale à la Base supérieure CD. Or CD est égale à AB Base du Parallélogramme. Donc EF est égale à AB. *De même Hauteur* : cette Hauteur est également exprimée dans les deux Figures par la Perpendiculaire CE.

Or l'espace contenu dans le Rectangle EFDC est égal à l'espace compris dans le Parallélogramme ABCD. Car pour former le Rectangle, il a fallu retrancher du Parallélogramme le Triangle ACE, & ajouter le Triangle BDF, le reste de l'espace EBDC étant commun aux deux Figures. Il ne s'agit donc que de sçavoir si le Triangle retranché est égal au Triangle ajouté. Or cette égalité est manifeste. Car 1°. le Côté AC est égal au Côté BD. 2°. La Perpendiculaire EC, à la Perpendiculaire FD. 3°. Le Côté AE, au Côté BF ; car ces deux Lignes marquent la distance des deux également obliques AC, BD aux Perpendiculaires partant des mêmes Points C & D. Il seroit également aisé, s'il en étoit besoin, de prouver l'égalité respective de tous les Angles de ces deux Triangles rectangles. Par conséquent, *la Surface du Parallélogramme incliné est égale à celle du Rectangle de même Base & de même Hauteur.*

2.

Fig. 19. Dans un espace parallele soient construits un Rectangle & un Parallélogramme incliné de même Base. Il n'est pas besoin de prouver qu'ils ont la même Hauteur perpendiculaire.

Soit le Rectangle couvert de Lignes égales & paralleles à la Base AB. Soient encore toutes ces Lignes prolongées jusqu'au Côté *bd* du Parallélogramme. Il est évident que la prolongation de ces Lignes couvrira exactement tout l'espace parallele, & par conséquent tout le Parallélogramme incliné. Toutes les parties de ces Lignes prolongées, sont égales à *ab*, & par conséquent à la Base du Rectangle. Par conséquent, tous les Elémens du Parallélogramme sont égaux à ceux du Rectangle. Or il est manifeste que le nombre des Elémens du premier est le même que celui des Elémens du second, puisque les Lignes élémentaires du Parallélogramme ne sont que le prolongement de celles du Rectangle. Donc *le Parallélogramme est égal au Rectangle de même Base & de même Hauteur.*

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. I, §. III.

Supposons que les deux Lignes qui forment l'espace parallele soient prolongées indéfiniment : tous les Rectangles qu'on y pourroit construire, auroient non-seulement la même grandeur, mais aussi la même forme. Un seul les représente tous.

Il n'en est pas ainsi des Parallélogrammes inclinés de même Base & de même Hauteur que le Rectangle ; car leur inclinaison, leur forme & la Longueur de leurs Côtés *ac*, *bd* peuvent varier à l'infini. Mais quelque inclinaison qu'on leur donne, il est démontré qu'étant égaux au Rectangle, ils sont aussi tous égaux entre eux.

LIV. II.
II. SECT.
II. PART.
CHAP. II.
§. I.

CHAPITRE II.

Figures de la seconde Classe.

§. I.

MESURE DU TRIANGLE.

LA mesure du Triangle, qui d'abord nous a paru si difficile à découvrir, n'est plus qu'un jeu depuis que nous connoissons celle des Parallélogrammes. Pour peu qu'on y fasse attention, on s'appercevra que le Triangle n'est autre chose que la moitié d'un Parallélogramme partagé en deux parties par une Diagonale.

Fig. 20. En effet, prenant un Triangle quelconque, & pour Base tel de ses Côtés que l'on voudra, comme AB; les deux Côtés se réunissant en un seul Point, le Triangle doit être censé tracé dans un espace parallele.

Soit donc tiré par le Sommet C une Parallele à AB. Sur cette Parallele prenez CD égale à AB, & joignez les extrémités D & B par une Ligne droite. Cette Ligne sera aussi parallele au Côté AC, puisque les égales & également inclinées AB, CD mesurent la distance qui les sépare. Nous avons donc le Parallélogramme ABCD de même Base que le Triangle, & aussi de même Hauteur, puisque les deux Figures sont comprises dans le même espace parallele. Mais

BC l'un des Côtés du Triangle étant Diagonale du Parallélogramme, partage celui-ci en deux Triangles égaux. Donc le Triangle ABC est moitié du Parallélogramme ABCD.

Or la mesure du Parallélogramme est le Produit de sa Base par sa Hauteur perpendiculaire. Donc la mesure du Triangle est le Produit de sa Base par la moitié de sa Hauteur, ou de sa Hauteur par la moitié de sa Base.

Il suit de-là 1°. que tous les Triangles de même Base & de même Hauteur sont égaux. Ce Corollaire est d'un grand usage dans la Géométrie, parcequ'il fait connoître sans aucune discussion l'égalité d'un grand nombre de Triangles d'une forme si différente, qu'on ne seroit pas même tenté de les comparer. Fig. 21.

Il suit 2°. que l'espace contenu dans un Triangle rectangle est le Produit d'un des Côtés de l'Angle droit pris pour Base, par la moitié de l'autre Côté. Car ce dernier étant perpendiculaire, exprime la Hauteur du Triangle. Fig. 22.

3°. Que le Triangle est égal au Parallélogramme de même Base & de moitié de Hauteur : ou bien au Parallélogramme de même Hauteur & de moitié de Base. Fig. 23. & 24.



LIV. II.
II. SECT.
II. PART.
CHAP. II.
§. II.

§. II.

Mesure des Quadrilateres irréguliers, & spécialement du Trapèze.

Fig. 25. LES Quadrilateres irréguliers sont de vrais Triangles tronqués. Car en prolongeant les Côtés opposés non paralleles, ils iront se réunir en un Sommet commun.

Ainsi, pour avoir la Surface de cette Figure, on pourroit prendre celle du Triangle total, en retrancher la valeur du petit Triangle ajouté: le reste sera la valeur du Quadrilatere.

Mais il est bien plus court & plus simple de partager la Figure en deux Triangles par le moyen d'une Diagonale, & de mesurer les deux Triangles l'un après l'autre.

Fig. 26. Le Trapèze est aussi un Triangle tronqué; & par conséquent on pourroit le mesurer comme les autres Quadrilateres irréguliers. Mais sa propriété d'avoir deux Côtés opposés paralleles lui donne une sorte de régularité, qui le distingue avantageusement des autres Quadrilateres, & qui mérite qu'on le considere avec plus d'attention. D'ailleurs cette Figure est importante dans la Géométrie. Nous avons déja vu que les Côtés du Polygône circulaire sont des Trapèzes infiniment petits; & la suite nous fera connoître les grands usages de cette Figure. C'est par cette considération que les Géométres ont entrepris de la réduire directement au Parallélogramme,

c'est-à-dire, d'y trouver les deux Produisans du Parallélogramme auquel elle est égale.

Observons 1°. que le Trapèze ayant deux de ses Côtés opposés non paralleles, il est nécessaire que les deux Côtés paralleles soient d'inégale Longueur. On les désigne par les noms de grande Base & de petite Base; & l'on prend ordinairement la grande pour la Base de la Figure.

2°. La Hauteur du Trapèze est exprimée par une Perpendiculaire abaissée d'un Point quelconque de la Base supérieure sur l'inférieure.

Cela posé : je considere que si je multipliois la grande Base AB par la Hauteur EF, le Produit seroit trop grand. Car il est visiblement faux que la Base AB soit contenue autant de fois dans le Trapèze, qu'il y a de Points dans EF. D'un autre côté, si je multiplie la petite Base CD par la Hauteur EF, il est également visible que le Produit sera trop petit; puisque CD mûe parallelement à elle-même le long de EF ne pourroit couvrir tout le Trapèze.

Mais je m'imagine que prenant EF pour l'un des Produisans, je trouverai l'autre dans une Ligne qui tiendroit le milieu entre la grande & la petite Base, c'est-à-dire, qui surpasseroit la petite Base en Longueur, autant qu'elle-même seroit surpassée par la grande. C'est ce que l'on appelle une *moyenne arithmétique*.

Je cherche donc cette *moyenne arithmétique*; & pour la trouver, je considere que si je voulois couvrir tout l'espace du Trapèze par le mouvement de la Base supérieure CD, il faudroit que cette Base en descendant parallelement à

elle-même le long de la Hauteur EF, reçut à chaque pas de sa descente une augmentation de Longueur, pour atteindre par ses extrémités les deux Côtés AC, BD du Trapèze. Ces augmentations seroient uniformes. Car l'Obliquité des Côtés AC, BD étant la même pour chacun d'eux dans l'espace parallele, ils s'écartent uniformement l'un de l'autre en descendant depuis C jusqu'en A, & depuis D jusqu'en B.

Par conséquent, la Base CD aura reçu la moitié de ses accroissemens, lorsqu'elle sera parvenue à la moitié de sa course, c'est-à-dire, lorsqu'elle sera devenue la Ligne PO parallele aux deux Bases, également éloignées de l'une & de l'autre, & coupant en deux parties égales les Côtés AC, BD & la Hauteur perpendiculaire EF.

Cette Ligne PO est la moyenne arithmétique que nous cherchons. Car puisqu'elle n'a reçu que la moitié des accroissemens qu'il lui faudroit, pour que la petite Base devînt égale à la grande, elle surpasse autant la premiere en Longueur, qu'elle est surpassée par la seconde.

Or je crois voir que cette moyenne PO multipliée par la Hauteur EF donne l'espace contenu dans le Trapèze. Car si cette Ligne PO est trop grande pour produire l'espace supérieur de la Figure, en la multipliant par la moitié de la Hauteur perpendiculaire, elle est aussi trop petite pour produire l'espace inférieur, en la multipliant par l'autre moitié de la Ligne de Hauteur; & ce qu'elle a de trop pour l'espace supérieur, est precisément ce qui lui manque pour l'espace inférieur. Donc, toute compensation faite,

cette

cette Ligne mitoyenne multipliée par toute la Ligne de Hauteur, donnera l'eſpace contenu dans le Trapèze.

Pour n'être pas dupes d'un raiſonnement peut-être plus ſubtil que ſolide, vérifions-le exactement. Pour cela, par l'extrémité O de notre Ligne moyenne, tirons une Ligne droite parallele au Côté AC du Trapèze, & qui aboutiſſe ſur la grande Baſe AB en un Point quelconque Y. Donnons à cette Parallele la longueur du Côté AC, en ſorte que YZ ſoit égale à AC. Prolongeons auſſi la petite Baſe CD juſqu'en Z: nous aurons le Parallélogramme AYZC, dans lequel les Baſes AY, CZ & la moyenne PO ſeront des Lignes égales, puiſque ce ſont des Paralleles également inclinées dans un eſpace parallele.

Les Produiſans de ce Parallélogramme ſont la Baſe AY, ou ſon égale PO, & la Perpendiculaire EF. Donc ſi le Parallélogramme eſt égal au Trapèze, celui-ci aura les mêmes Produiſans.

Pour nous convaincre de l'égalité des deux Figures, conſidérons que ſi le Parallélogramme retranche le Triangle YOB de la partie inférieure du Trapèze, il ajoute à la partie ſupérieure le Triangle DOZ. Or l'égalité du Triangle retranché & du Triangle ajouté eſt manifeſte. Car la Ligne BD étant coupée en deux parties égales au Point O, le Côté OB du Triangle inférieur eſt égal au Côté OD du ſupérieur : de plus PO parallele aux deux Baſes, coupant auſſi en deux parties égales le Côté AC du Rectangle, coupe de même le Côté oppoſé parallele YZ. Donc le

P

Côté OY du Triangle inférieur est égal au Côté OZ du Triangle supérieur. Enfin les deux Angles opposés au Sommet en O sont égaux, aussi bien que les Alternes OYB, OZD. Donc les deux Triangles sont égaux. Donc le Parallélogramme AYZC est égal au Trapèze ABDC. Donc les Produisans du Trapèze, ainsi que du Parallélogramme, sont la Ligne de Hauteur EF; & la moyenne arithmétique PO égale à la Base AY du Parallélogramme.

Je dis, *moyenne arithmétique* : car YB 3[e] Côté du Triangle inférieur est égal à DZ 3[e] Côté du Triangle supérieur. Or la grande Base surpasse PO de la Longueur YB, & PO surpasse CD de la Longueur DZ. Donc la Ligne PO surpasse autant la petite Base, qu'elle-même est surpassée par la grande.

Il est nécessaire pour la suite d'avoir cette mesure du Trapèze très-présente à l'esprit.



CHAPITRE III.

Figures de la troisiéme classe.

§. I.

Mesure des Polygônes réguliers de plus de quatre Côtés.

Les Polygônes réguliers sont partagés par leurs Raïons obliques en autant de Triangles égaux, qu'ils ont de Côtés. Ainsi, pour connoître l'espace contenu dans un Polygône régulier, il suffiroit de mesurer l'aire d'un de ses Triangles, & d'en prendre la valeur autant de fois qu'il y a de Côtés dans le Polygône.

Mais on peut s'exempter de ce petit calcul, & réduire tout d'un coup le Polygône au Rectangle qui lui seroit égal, en trouvant ses deux Produisans par une seule opération.

Pour cela considérons que les Triangles qui partagent un Polygône régulier, ont tous la même Hauteur exprimée par le Raïon droit. Par conséquent, tous ensemble sont égaux à un seul Triangle, qui auroit pour Hauteur le Raïon droit du Polygône, & pour Base une Ligne droite égale au Périmétre entier. Car il est égal de multiplier l'une après l'autre un certain nombre de Bases par la moitié du même Raïon, ou de multiplier tout à la fois par la moitié de ce Fig. 27.

Raïon, l'amas des Bases réunies dans la Base d'un grand Triangle.

Par conséquent, *le Polygône régulier est égal au Rectangle, qui auroit pour Base une Ligne droite égale au Périmétre, & pour Côté la moitié du Raïon droit*; ou bien, *qui auroit le Raïon droit pour Côté, & pour Base la moitié du Périmétre.*

§. II.

Mesures des Polygônes irréguliers.

Fig. 28. LOrsqu'un Polygône irrégulier est, ou peut être circonscrit au Cercle, il est aisé de le réduire à un seul Triangle, & par conséquent au Rectangle. Car ce Polygône étant partagé en Triangles par ses Raïons obliques, ces Triangles quoiqu'inégaux, ont néanmoins la même Hauteur exprimée par le Raïon du Cercle inscrit, lequel tombant perpendiculairement sur le Côté du Polygône, en est en même tems le Raïon droit. Ces Triangles quoiqu'inégaux, ayant donc un Produisant commun, sont égaux à un seul Triangle, qui auroit pour Base une Ligne droite égale au Périmétre du Polygône, & pour Hauteur le Raion du Cercle inscrit.

Fig. 29. Il n'en est pas de même du Polygône irrégulier, qui seroit, ou pourroit être inscrit dans un Cercle. Ses Raïons obliques, il est vrai, seroient égaux, parcequ'ils seroient en même tems Raïons du Cercle circonscrit. Mais les Raïons droits ne

le seroient nullement, parceque les grands Côtés du Polygône seroient plus près du Centre du Cercle, que les petits Côtés. Or les Raïons obliques n'entrent pour rien dans la production de l'espace : il n'y a que les Raïons droits qui soient Produisans. Ainsi, les Triangles qui partageroient ce Polygône, n'ayant aucun Produisant de commun, il est nécessaire de les mesurer séparément, & de réunir toutes leurs valeurs partielles, pour en faire une somme totale, qui donnera la Surface du Polygône.

On est obligé à plus forte raison d'avoir recours à la même méthode pour les Polygônes irréguliers, qu'on ne peut inscrire dans le Cercle ni circonscrire au Cercle.

A l'égard des Figures tout-à-fait irrégulieres, dont le Périmétre formeroit tantôt des Angles saillans, & tantôt des Angles rentrans, on voit aisément qu'il faut plusieurs opérations pour parvenir à les toiser. On les partage en Triangles & en Parallélogrammes, que l'on mesure séparément, & dont on rassemble toutes les valeurs pour en faire un total.

Fig. 30.



CHAPITRE IV.

FIGURES DE LA IV. CLASSE.

TOutes les Figures planes terminées par une Ligne courbe appartiennent à la 4[e] classe. Mais de toutes ces Figures dont le nombre est infini, la Géométrie ordinaire, comme on l'a déja dit, ne considere que le Cercle, la seule d'entre elles qui soit parfaitement réguliere.

§. I.

LA mesure du Cercle est une suite de la mesure des Polygônes réguliers, puisque luimême est un Polygône régulier d'une infinité de Côtés. Cette Figure peut être conçue comme partagée par ses Raïons obliques en une infinité de Triangles égaux, dont les Bases sont infiniment petites: & toutes ces Bases, prises ensemble, sont égales à la Circonférence du Cercle.

La valeur de chaque Triangle seroit donc la Base multipliée par la moitié du Raïon droit. Mais dans le Cercle, le Raïon droit ne différant de l'oblique que d'un infiniment petit du second ordre, la différence de ces deux Raïons est absolument nulle par rapport aux Figures dont la grandeur est assignable. On doit donc dire que chacun des Triangles qui partagent le Cercle a pour valeur le Produit de la petite Base par la

moitié du Raïon ordinaire. Par conséquent, le Cercle est égal à un seul Triangle, lequel auroit pour Base une Ligne droite égale à la Circonférence du Cercle, & le Raïon pour Hauteur.

[redacted]

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. IV. §. I.

Cette vérité peut être démontrée d'une autre maniere. La preuve suppose la connoissance des Proportions dont nous n'avons pas encore parlé. Mais elle est en même tems si simple, que nous pouvons passer par-dessus cette considération.

Soit un Cercle avec son Raïon CA; soit la Tangente AB égale à la Circonférence; la Ligne CB acheve la construction du Triangle rectangle. Fig. 31.

L'espace contenu dans le Cercle peut être regardé comme un amas d'une infinité de Circonférences concentriques, qui vont toujours en diminuant depuis la premiere Circonférence jusqu'au Centre: & le nombre de ces Circonférences, quel qu'il soit, est égal au nombre des Points contenus dans le Raïon CA, puisque chacune de ces Circonférences coupe le Raïon en un seul Point. (a)

De même l'espace du Triangle ABC peut être considéré comme couvert d'une infinité de Bases paralleles à AB, lesquelles vont toujours en diminuant depuis AB jusqu'au Sommet C: & le nombre de ces Bases, quel qu'il soit, est égal au nombre des Points contenus dans le Raïon CA.

(a) Je suppose ici toutes les Circonférences concentriques d'égale Largeur, & je regarde le Raïon comme une suite de Points uniformes. Cela n'est point contraire à une autre maniere de les considérer, expliquée ci-dessus, Part. I. Chap. I. §. VI.

Hauteur du Triangle, puisque chacune de ces Bases coupe le Raïon en un seul Point.

Or il est naturel de penser que le nombre des Bases du Triangle étant égal au nombre des Circonférences concentriques, & la premiere Base, égale à la premiere Circonférence, chacune des autres Bases doit être égale à la Circonférence qui lui correspond.

Pour nous en assurer davantage, soit prise au hazard une de ces Circonférences concentriques : qu'on lui tire une Tangente DE, laquelle sera Base correspondante dans le Triangle. Je dis que la petite Circonférence est égale à la Base DE.

Considérons que les Cercles sont des Figures tout-à-fait semblables. Un seul Cercle représente tous les Cercles possibles : une seule Ligne donnée pour Raïon détermine la grandeur de la Circonférence. Par conséquent, les Circonférences de deux Cercles sont entre elles comme leurs Raïons. Donc, dans notre exemple la petite Circonférence concentrique est à la grande, comme le Raïon CD est au Raïon CA.

D'un autre côté, par le moyen de la petite Base DE, on a les deux Triangles ACB, DCE tout-à-fait semblables. Ils sont tous deux Rectangles : ils ont l'Angle C commun ; & les Angles en B & en E égaux. Ainsi, l'on doit dire que la Base du petit Triangle est à la Base du grand, comme le Raïon CD, Hauteur du petit Triangle, est au Raïon CA, Hauteur du grand.

Les Circonférences des deux Cercles ont donc avec leur Raïon, le même rapport que les

deux Bases ont avec ces mêmes Raïons envisagés comme Hauteurs des deux Triangles. Par conséquent, puisque les Hauteurs des Triangles sont égales aux Raïons, & la grande Circonférence, à la grande Base, la petite Base doit être égale à la petite Circonférence.

Il suit de-là que le total des Circonférences concentriques qui couvrent l'espace du Cercle, est égal au total des Bases qui couvrent l'espace du Triangle. Car il n'y a aucune de ces Circonférences, comparée avec la Base correspondante, à laquelle on ne puisse appliquer le même raisonnement que nous venons de faire sur l'une d'entre elles. Donc *l'espace compris dans le Cercle est égal à celui du Triangle, dont la Base seroit la Circonférence, & la Hauteur le Raïon du Cercle.* Donc *le Cercle est égal à un Rectangle qui auroit pour Base la Circonférence, & pour Côté la moitié du Raïon: ou bien, pour Base la moitié de la Circonférence, & le Raïon pour Côté.*

La difficulté seroit de trouver une Ligne droite égale à la Circonférence du Cercle. Mais nous avons averti dans le dernier Chap. de la Sect. précédente, que l'on n'y pouvoit parvenir que par des approximations qui suffisent dans la Pratique.



§. II.

Mesure des Portions du Cercle.

LEs Portions du Cercle sont le *Secteur*, le *Segment* & la *Couronne*.

Fig. 32. Le *Secteur* est une partie du Cercle terminée par deux Raïons & par un Arc.

Le Cercle est un Polygône d'une infinité de Côtés, qui par ses Raïons obliques est partagé en une infinité de Triangles, dont la Base est infiniment petite. Chacun de ces Triangles a pour mesure le Produit de sa Base par la moitié du Raïon. Donc, avons-nous dit, le Cercle entier a pour Produisans la moitié du Raïon, & l'amas de toutes ces petites Bases qui forment sa Circonférence. Le Secteur est aussi composé d'un nombre quelconque de ces petits Triangles, dont les Bases forment son Arc. Donc le Secteur a pour Produisans la moitié du Raïon, & la partie de la Circonférence comprise entre ses Côtés.

D'ailleurs le Secteur est une espéce de Triangle dont la Base est un Arc de Cercle. Tout Triangle a pour mesure le Produit de sa Base par la moitié de sa Hauteur. Or la Hauteur du Secteur n'est pas différente du Raïon, parceque dans le Secteur, aussi-bien que dans le Cercle, le Raïon droit ne differe du Raïon oblique que d'un infiniment petit du second ordre.

Enfin, le Cercle est un composé de Secteurs:

ces Secteurs ont le même Raïon que le Cercle, & n'en different que par l'étendue de la Circonférence. Donc, puisque le Cercle est égal au Triangle rectiligne dont la Base équivaudroit à la Circonférence, & qui auroit pour Hauteur le Raïon du Cercle, le Secteur est égal aussi au Triangle rectiligne qui auroit le Raïon pour Hauteur, & dont la Base équivaudroit à l'Arc. On peut appliquer au Secteur & à ses Arcs concentriques la même démonstration qui nous a fait voir l'égalité des Circonférences concentriques avec les Bases correspondantes dans le Triangle.

Le *Segment* est une portion de Cercle terminée par une Corde & par l'Arc qu'elle soutient. Fig. 35.

Pour avoir sa Surface, il faut achever le Secteur, dont le Segment fait partie, en tirant les deux Raïons AC, BC. Il faut ensuite mesurer l'aire du Secteur entier: en retrancher l'aire du Triangle rectiligne ACB. Le reste sera la valeur du Segment.

La *Couronne* est une portion de Cercle terminée par deux Circonférences concentriques. Fig. 31.

L'inspection de la Figure nous montre que le Cercle entier est égal au grand Triangle ACB; que le petit Cercle qui reste, en retranchant la Couronne, est égal au petit Triangle DCE. Donc la Couronne est égale à ce qui reste du Triangle, c'est-à-dire, au Trapèze ABED.

On doit donc dire en général que *toute Couronne est égale à un Trapèze rectiligne, dont la grande Base équivaudroit à la grande Circonférence, & la petite Base, à la petite Circonférence; & qui auroit pour Hauteur la partie du Raïon du*

Cercle, comprise entre les deux Circonférences concentriques.

Et comme les deux Produisans de ce Trapèze sont cette même partie du Raïon, & une Ligne moyenne arithmétique tirée parallelement à égale distance des deux Bases, il est évident que *l'espace renfermé dans la Couronne, est le Produit de la partie du Raïon qu'elle contient, par une troisiéme Circonférence concentrique qui couperoit la partie du Raïon par le milieu, & qui seroit également éloignée des deux Circonférences qui terminent la Couronne.*

CHAPITRE V.

La superficie des Figures planes comparée avec leur Périmétre.

LES Commençans pourroient être tentés de croire qu'on doit juger de la grandeur d'une Surface par la grandeur du Périmétre : que les espaces contenus dans un plus grand Périmétre, sont plus grands ; & que les Périmétres égaux renferment des espaces égaux. Je suis persuadé que les premiers Arpenteurs agirent en conséquence de ce préjugé. Mais l'expérience les détrompa bientôt d'une méthode, commode à la vérité, mais qui les faisoit tomber dans des méprises grossieres.

En effet, il n'est pas besoin de réflexions profondes pour se convaincre, que les espaces ren-

fermés dans les Figures, ne sont point du tout en raison de leurs Périmétres.

Fig. 34.

Soit un Quarré partagé en deux également par la Ligne AB parallele au Côté supérieur & au Côté inférieur : il est évident que le Périmétre du demi-Quarré est plus grand à proportion que le Périmétre du Quarré. Car celui-ci consiste en 4 AB ; & le demi-Quarré est environné de 2 AB + $\frac{2}{2}$ AB = 3 AB. En sorte que si l'on rejoint les deux moitiés, de 6 AB qui formoient leur Périmétre, il n'en faudra plus que 4 pour le Périmétre du Quarré entier.

De même, si l'on partage un Cercle en deux parties par le Diamétre, il est manifeste que le Périmétre du demi-Cercle est plus de la moitié du Périmétre du Cercle, puisque le demi-Cercle a pour bornes, non-seulement la moitié de la Circonférence, mais de plus une Ligne droite assez étendue.

Il est inutile de multiplier les exemples : ils se présentent en foule. Tâchons plutôt d'approfondir les raisons d'une disproportion qui paroît d'abord avoir quelque chose de surprenant. Je les réduis à deux : sçavoir, au plus ou au moins de Largeur à l'égard des Parallélogrammes, & à la nature des Angles pour tous les Polygônes.

I.

Raison de la Largeur dans les Parallélogrammes. Fig. 10, 14, 15.

Nous avons prouvé dans le premier Ch. de cette II. Part. §. III. qu'ayant un Parallélogramme rectangle, & un incliné dont les Côtés sont respectivement égaux, & qui par conséquent ont un Périmétre égal, le premier contient plus

d'eſpace que le ſecond ; & d'autant plus d'eſpace, que le ſecond eſt plus incliné. Cette différence vient uniquement de la Largeur plus grande dans le rectangle que dans l'incliné, quoique d'ailleurs ils aient la même Longueur & le même Périmétre.

Si l'on y fait même attention, on verra que la Largeur influe en un ſens plus que la Longueur, dans la grandeur de l'eſpace. Et cela ſe vérifie même dans les Rectangles. Il eſt évident, par exemple, qu'un Rectangle de 9 Pieds de long & d'un Pied de haut, eſt plus petit qu'un autre Rectangle dont la Longueur ne ſeroit que de 5 Pieds, & la Largeur de 2. Car le ſecond contiendroit 10 Pieds quarrés, & le premier n'en contient que 9. Cependant la Longueur du Premier paroît exceſſive en comparaiſon de l'excédent de la Largeur du Second ; & de plus la différence de leur Périmétre eſt énorme. Car le Premier a 20 pieds courans de circuit, & le Second n'en a que 14. C'eſt que les Lignes n'ayant qu'une Largeur infiniment petite, ne peuvent former un eſpace que par leur répétition ; & que par conſéquent une Ligne plus petite qu'une autre, mais répétée deux fois davantage, pourra former un plus grand eſpace.

De-là nous devons conclure qu'en général & toute proportion gardée, l'eſpace n'eſt jamais ſi grand dans un Rectangle, que lorſque ſa Largeur eſt égale à ſa Longueur, ſans que la grandeur du Périmétre y puiſſe influer en aucune ſorte.

Fig. 35. Soit un Quarré dont la Racine ſoit de 5 Pieds.

Fig. 36.

Son Périmétre sera de 20 Pieds courans; & l'espace compris de 25 Pieds quarrés.

Soit aussi un Rectangle dont la Base soit de 10 Pieds, & la Hauteur de 2. Son Périmétre sera de 24 Pieds courans, & son espace de 20 Pieds quarrés. Ainsi, le Rectangle surpassant le Quarré de 4 Pieds courans par son Périmétre, sera moindre de 5 Pieds quarrés du Côté de l'espace; ce qui fait une différence considérable.

On en sera moins surpris, si l'on fait réflexion que des 4 Côtés du Rectangle, il n'y en a que deux qui soient Produisans de l'espace; & que les deux autres ne servent qu'à terminer la clôture de la superficie. Il n'y a donc que les deux Produisans à considérer, quand il s'agit de juger de la grandeur de l'espace, les deux autres Côtés n'y pouvant influer en rien.

Les deux Produisans du Quarré sont 5 & 5. Ceux du Rectangle sont 10 & 2. Or 5 pris 5 fois, donne plus que 10 pris 2 fois. Pour que le Rectangle fût égal au Quarré, il faudroit que le second Produisant du Rectangle fût $2+\frac{1}{2}$. Car $10 \times 2+\frac{1}{2} = 25$.

Mais remarquons dans cette supposition 1°, que l'augmentation d'un $\frac{1}{2}$ dans la Largeur augmente de 5 Pieds quarrés l'espace du Rectangle. 2°. Que les deux Produisans du Rectangle sont ensemble 12 Pieds & demi courans: au lieu que les deux Produisans du Quarré ne sont que 10 Pieds; ce qui montre toujours combien la Raison de Largeur influe dans la grandeur de l'espace.

2.

LIV. II. II. SECT. II. PART. CHAP. V.

2. Raiſon des Angles dans les Polygônes.

SI nous portons nos vûes plus loin, & que nous comparions enſemble tous les Polygônes, nous verrons que la qualité de leurs Angles contribue infiniment à la grandeur plus ou moins grande de l'eſpace qu'ils renferment.

En effet, l'eſpace compris entre les deux Côtés d'un Angle allant toujours en diminuant depuis la Baſe juſqu'au Sommet, plus les Côtés de l'Angle ſe rapprocheront, demeurant toujours de la même Longueur, & plus l'eſpace compris diminuera: plus au contraire les Côtés s'écarteront, & plus l'eſpace augmentera. Par conſéquent, on doit dire en général, que plus les Angles d'une Figure ſeront aigus, & moins elle contiendra d'eſpace; & qu'elle en contiendra davantage à meſure que ſes Angles ſeront plus obtus. Or les Polygônes d'un grand nombre de Côtés ont leurs Angles très-obtus: or le Cercle étant un Polygône d'une infinité de Côtés, a des Angles infiniment obtus. Donc toute proportion gardée, les Polygônes d'un grand nombre de Côtés renferment un plus grand eſpace. Donc de tous les Polygônes le Cercle eſt celui qui en renferme un plus grand.

Pour éclaircir cette Théorie, repréſentons-nous ici toutes les eſpéces de Polygônes: ſuppoſons-les réguliers & en même tems *iſopérimétres*, c'eſt-à-dire, environnés d'un Périmétre égal. Nous ne demanderons pas s'ils contiennent la même étendue: ce n'eſt plus une queſtion; mais quel eſt celui qui dans un circuit égal renferme

ferme le plus grand espace, & celui qui renferme le plus petit.

Tous ces Polygônes ont un Produisant commun; sçavoir, la moitié de leur Périmétre égal: & chaque Polygône aura son Raïon droit pour second Produisant. Pour que les Polygônes isopérimétres fussent égaux, il faudroit donc qu'ils eussent le même Raïon droit. Or, cela ne se peut, puisque nous avons prouvé dans la Section précédente qu'il y avoit plus de différence entre le Raïon oblique & le droit dans le Triangle équilateral, que dans le Quarré: dans le Quarré, que dans le Pentagône, & ainsi à l'infini; & qu'enfin dans le Cercle, la différence des deux Raïons disparoissoit. Donc le second Produisant est plus petit dans le Triangle, que dans le Quarré: plus petit dans le Quarré, que dans le Pentagône; & ainsi à l'infini. Donc, *de tous les Polygônes réguliers isopérimétres, le Triangle est le plus petit; & le Cercle, le plus grand.*

V. Sect. 1. Ch. 3. S. 2.

On pourroit faire contre cette preuve une objection, qui d'abord paroît assez plausible. La voici.

Pour démontrer que la différence du Raïon oblique au Raïon droit diminue à mesure que le Polygône augmente en Côtés, on a supposé que tous les Polygônes réguliers avoient le même Raïon oblique, & qu'ils étoient inscrits dans le même Cercle ou dans des Cercles égaux. Mais des Polygônes réguliers inscrits dans le même Cercle ne sont point isopérimétres. Car on a prouvé que la Circonférence du Cercle étoit plus grande, que le Périmétre de tout Polygône

Ibid.

Sect. 1. Ch. 4.

inſcrit; & d'autant plus grande que le Polygône inſcrit avoit moins de Côtés: que par conſéquent le Périmétre du Quarré étoit plus grand que le Périmétre du Triangle inſcrit dans le même Cercle, &c.

D'où il ſuit, que ſi l'on a deux Polygônes iſopérimétres, par exemple, un Triangle équilatéral & un Quarré, & qu'on leur circonſcrive des Cercles, il faudra un plus grand Cercle pour circonſcrire le Triangle, que pour circonſcrire le Quarré. Par conſéquent, le Raïon oblique du Triangle iſopérimétre ſera plus grand que celui du Quarré.

Sans donner donc atteinte à la maxime générale ſur l'aggrandiſſement du Raïon droit dans les Polygônes qui ont plus de Côtés, on pourroit ſuppoſer dans un Triangle & dans un Quarré le même Raïon droit, pendant que leur oblique ſeroit fort différent, comme on prouve que leur Raïon droit eſt différent, lorſque leur Raïon oblique eſt le même. Il faudroit donc prouver que deux Polygônes dont le Raïon droit ſeroit égal, ne pourroient être iſopérimétres. Telle eſt la difficulté.

J'avoue que les fondemens en ſont inconteſtables: il ne s'agit que de l'application. On ne peut nier, par exemple, qu'un Triangle & un Quarré ne puiſſent avoir le même Raïon droit. Mais je ſoutiens que ces deux Figures ne feront pas iſopérimétres. Pour nous en convaincre, inſcrivons-y des Cercles. Ces Cercles ſeront égaux, puiſque leur Raïon ſera la même choſe que le Raïon droit des deux Polygônes. Mais il

eſt démontré, que ſi l'on circonſcrit au même Cercle, ou bien à des Cercles égaux, deux Polygônes différens, celui qui aura le moins de Côtés, aura un plus grand Périmétre. Donc, dans notre exemple le Triangle & le Quarré, dont le Raïon droit ſeroit égal, ne ſeroient point iſopérimétres.

Par conſéquent, ſi nous les ſuppoſons iſopérimétres, leur Raïon droit ne peut être égal. Car les Cercles que l'on inſcriroit dans ces Polygônes ſeroient inégaux. Celui qui ſeroit inſcrit dans le Triangle ſeroit plus petit que celui qui ſeroit inſcrit dans le Quarré : l'inſcrit dans le Quarré, plus grand que l'inſcrit dans le Pentagône, & ainſi de ſuite à l'infini, juſqu'à ce que nous parvinſſions au Polygône d'une infinité de Côtés qui ſe confond avec le Cercle auquel il eſt circonſcrit.

Donc le Raïon droit du Triangle iſopérimétre, eſt plus petit que celui du Quarré : celui du Quarré, plus petit que celui du Pentagône : enfin celui du Cercle, plus grand que celui de tous les autres Polygônes iſopérimétres.

Tous ces Polygônes, je le répéte, ont un Produiſant égal & commun, ſçavoir, la moitié de leur Périmétre. Mais leur ſecond Produiſant, ſçavoir, le Raïon droit, eſt inégal, plus petit dans le Triangle que dans le Quarré, &c. Donc, *de tous les Polygônes iſopérimétres, le Triangle équilatéral eſt celui qui renferme le moins d'eſpace; & le Cercle, celui qui en renferme davantage.*

Liv. II. II. Sect. II. Part. Chap. V.
Sect. I. Ch. IV.
Fig. 44. & 45. de la I. Sect.
Fig. 37. & 38.

LIVRE SECOND.

SECTION III.

Des Figures planes ſemblables.

IL n'eſt plus queſtion d'examiner le Périmétre d'une Figure, de meſurer les Angles formés par le contour des Lignes qui l'environnent, de déterminer l'eſpace renfermé dans ſes limites: tout cela nous eſt connu. Il s'agit à préſent de comparer des Figures, qui, ſans être égales, ſe reſſemblent parfaitement; d'étudier les rapports intimes qu'elles ont entre elles; & de recueillir les vérités importantes que cet examen nous découvrira.

Je pourrois ſuppoſer que quiconque s'occupe ſérieuſement de la Géométrie, n'ignore pas la Théorie des Raiſons & des Proportions; & qu'il eſt en état d'appliquer ſans effort à l'étendue, qui n'eſt qu'une eſpéce de Grandeur, ce qu'il connoît déja de la nature & des propriétés de la Grandeur en général.

Mais quelque ſoit la ſcience de ceux qui ſe donneront la peine de lire ces Elémens, ils ne trouveront pas mauvais que je leur rappelle des principes qu'ils ne peuvent avoir trop préſens à l'eſprit. Les Mathématiques ne nous offrent rien qui ſoit plus intéreſſant, plus exquis, & plus

propre, soit à former, soit à perfectionner l'esprit géométrique.

Je diviserai cette troisiéme Section en trois Parties. La premiere sera un Traité abrégé des Raisons & des Proportions. On considérera dans la seconde les Figures semblables, selon leur Périmétre; & dans la troisiéme on les envisagera selon l'espace qu'elles renferment.

PREMIERE PARTIE.

Traité abrégé des Raisons & des Proportions.

CHAPITRE PREMIER.

DES RAISONS.

On appelle *Raison*, le Rapport qui se trouve entre deux Grandeurs de même espéce.

Je dis, *qui se trouve entre deux Grandeurs*: car l'esprit qui voit ce Rapport ne l'y met pas: il subsiste indépendamment de nous, & sans même que nous y pensions. C'est en cela que la Raison différe de la *Comparaison*. Celle-ci est une opération de l'ame, par laquelle on apperçoit la liaison de deux Grandeurs. Opération nécessaire; mais si distinguée de la *Raison*, que l'on compare quelquefois deux Grandeurs, sans en connoître le véritable rapport.

J'ajoute : *entre deux Grandeurs de même espéce.* Car quoiqu'il y ait toujours quelque rapport entre deux Grandeurs, de quelque nature qu'elles soient, ce n'est qu'un rapport imparfait. La Métaphysique peut en faire l'objet de ses méditations; mais la Géométrie ne considere que les rapports des Grandeurs homogènes, & se borne même à celles qui tiennent de l'étendue, ou qui s'y peuvent appliquer, c'est-à-dire, à l'Etendue proprement dite, au tems, au mouvement & aux nombres.

Comparer deux Grandeurs, c'est considérer de combien l'une surpasse l'autre; ou, combien de fois la premiere contient la seconde. En comparant la Grandeur 12 avec la Grandeur 6, je puis examiner de combien 12 surpasse 6; ou combien de fois 12 contient 6.

Il y a donc un double Rapport entre les Grandeurs de même espéce. On appelle le premier, Raison *arithmétique*; & le second, Raison *géométrique*. Ce n'est pas que le premier ne soit d'usage dans la Géométrie, où l'on considere souvent l'excédent d'une Ligne sur une autre Ligne, ou d'une Figure sur une autre Figure. Mais le second rapport donnant lieu à des découvertes plus fines & plus importantes, on l'a nommé le *géométrique* par excellence. Ainsi, lorsque les Géométres parlent de *Raison* ou de *Rapport*, sans les spécifier, c'est toujours le Rapport & la Raison géométrique qu'il faut entendre.

L'un & l'autre rapport ont nécessairement deux *Termes* : parceque toute comparaison suppose

deux choses comparées. Le premier s'appelle *Antécédent* : c'est la Grandeur que l'on compare. Le second s'appelle *Conséquent* : c'est la Grandeur à laquelle la premiere est comparée.

On appelle *Exposant* de la Raison ce qui résulte du Rapport de deux Grandeurs. Car toute comparaison est une question, & l'Exposant est la réponse ou la solution. Ainsi, dans l'exemple proposé, l'Exposant de la Raison arithmétique de 12 à 6, est 6; parceque 6 est la Grandeur dont 12 surpasse 6 : & l'Exposant de la Raison géométrique de 12 à 6, est 2; parceque 12 contient deux fois 6.

On voit par-là que les deux Raisons ne sont autre chose sous d'autres termes, que les opérations de calcul si connues sous les noms de Soustraction & de Division. Car lorsque j'examine la Raison arithmétique de 12 à 6, je veus sçavoir ce qui me reste de 12 après en avoir ôté 6 : & ce Reste, *Excédent* du grand nombre sur le petit, ou *Différence* de ces deux nombres, est l'Exposant de la Raison arithmétique, laquelle par conséquent peut être exprimée par le signe de la Soustraction 12−6.

De même, lorsque je considere la Raison géométrique de 12 à 6, je veus sçavoir combien la Grandeur 12 contient de Grandeurs 6 : ce qui est diviser 12 par 6. Ainsi, l'Exposant d'une Raison géométrique, n'est que le *Quotient* d'une Division. Toute Raison géométrique est donc une *fraction*, & peut être exprimée par le signe de la Division $\frac{12}{6}$.

D'où il résulte que toute Raison est une vé-

ritable Grandeur, exprimée par l'Exposant. Car $12-6=6$: & $=\frac{12}{6}2$. On peut donc comparer ensemble deux Raisons, comme on compare deux Grandeurs. On verra dans la suite combien ce principe est fécond.

La premiere conséquence qu'il en faut tirer, c'est que la Grandeur d'une Raison ne dépend point de la Grandeur des Termes dont elle est composée. Ainsi, les Raisons arithmétiques de 24 à 18, de 12 à 6, de 8 à 2 sont égales, parceque toutes trois ont 6 pour Exposant. Je suis également riche, lorsqu'ayant 8 liv. j'en dois payer 2, que lorsqu'ayant 12 liv. j'en dois payer 6; ou qu'ayant 24 liv. j'en dois payer 18; parceque dans ces trois cas il me reste 6 liv.

De même, la Grandeur de la Raison géométrique de 24 à 12, n'est pas plus considérable que celle de 12 à 6, ou de 2 à 1; parceque 12 n'est pas contenu plus de fois dans 24, que 6 dans 12, ou 1 dans 2. Distribuez 24 liv. à 12 personnes, ou 12 à 6, ou 2 à 1, chacune d'elles ne peut recevoir que deux liv.

La Grandeur des Termes d'une Raison influe si peu dans la Grandeur de la Raison même, que si l'on diminue le Conséquent sans toucher à l'Antécédent, la Raison augmentera. Ayant la Raison de 12 à 6, si je substitue 3 à la place de 6, la Raison arithmétique de 12 à 3 aura 9 pour Excédent ou Exposant; & la Raison géométrique aura 4 pour Exposant ou Quotient.

Au contraire, la Raison diminuera, si laissant subsister l'Antécédent, on augmente le Conséquent. Dans la Raison proposée, si l'on prend

9 pour Conſéquent au lieu de 6, on n'aura que 3 d'Excédent pour la Raiſon arithmétique, & ſeulement $1+\frac{1}{3}$ pour la Raiſon géométrique.

Il ſeroit facile d'augmenter ou de diminuer les Raiſons, en faiſant les changemens dans l'Antécédent ſans toucher au Conſéquent.

Je me ſers des nombres pour rendre ſenſibles ces vérités générales, parceque les nombres ſont très-propres à repréſenter toute autre eſpéce de Grandeur. On voit aiſément que ce ne ſont que des exemples.

Les Raiſons étant donc des Grandeurs réelles, elles ſont ſuſceptibles des opérations que l'on peut faire ſur toutes les Grandeurs, c'eſt-à-dire, qu'on peut les augmenter par Addition & Multiplication, & les diminuer par Souſtraction & Diviſion.

Mais il faut prendre garde, qu'autre choſe eſt d'augmenter, de diminuer, de multiplier, de diviſer une Raiſon : autre choſe de faire ces opérations ſur les deux Termes qui la compoſent.

On ne peut augmenter ou diminuer une Raiſon, qu'en opérant de telle ſorte, que l'Expoſant augmente ou diminue. Nous venons d'en voir des exemples, & l'on en verra encore dans la ſuite.

Mais on peut opérer ſur les Termes, ſans que la Raiſon change, c'eſt-à-dire, ſans que l'Expoſant en reçoive la moindre atteinte : c'eſt ce qu'il faut maintenant expliquer.

La Raiſon arithmétique étant une Souſtraction, & la géométrique une vraie Diviſion, il eſt dans l'ordre d'employer l'Addition & la

Souſtraction pour augmenter & diminuer les Termes d'une Raiſon arithmétique ; & d'un autre côté, la Multiplication & la Diviſion à l'égard de la Raiſon géométrique. Cela poſé,

Si j'ajoute une Grandeur égale à chacun des Termes d'une Raiſon arithmétique, ou ſi j'en retranche une Grandeur égale, l'Expoſant ſera toujours le même, & la Raiſon ne changera point. Car c'eſt un principe évident, que lorſqu'à choſes inégales, on ajoute, ou qu'on en retranche choſes égales, les Touts augmentés ou diminués, conſervent entre eux la même inégalité qu'auparavant.

Ayant la Raiſon arithmétique de 12 à *6*, ſi j'ajoute 4 à ces deux Termes, ou ſi j'en retranche 4, l'Excédent de 16 ſur 10, & celui de 8 ſur 2 ſera *6*, ainſi que l'Excédent de 12 ſur *6*.

De même, ſi je multiplie ou ſi je diviſe les deux Termes d'une Raiſon géométrique par une même Grandeur quelconque, cette Raiſon ainſi transformée aura toujours le même Expoſant ou Quotient.

Ayant la Raiſon géométrique de 8 à 4 dont l'Expoſant eſt 2, ſi je multiplie les deux Termes par 3, j'aurai la Raiſon de 24 à 12, dont l'Expoſant eſt encore 2 : & ſi je diviſe les deux Termes 8 & 4 par 2, j'aurai la Raiſon de 4 à 2, dont l'Expoſant eſt encore 2.

Pour concevoir cette vérité d'une maniere encore plus générale, il faut obſerver 1°. que dans toute Raiſon, l'Antécédent eſt toujours regardé comme le Tout, & le Conſéquent comme partie du Tout. 2°. Qu'un Tout peut être

partagé en parties aliquotes, ou en parties aliquantes.

Les parties aliquotes sont celles, qui, répétées un certain nombre de fois, constituent exactement le Tout sans aucun reste. Ainsi, 10, 5, 4, 2, 1. sont parties aliquotes de 20; parceque 10 répété deux fois, 5 répété quatre fois, 4 répété cinq fois, 2 répété dix fois, & 1 répété vingt fois, font précisément le nombre 20.

Par la même raison, les parties proportionnelles d'un Tout, telles que les Moitiés, les Tiers, les Quarts, les Cinquiémes, &c. sont parties aliquotes; parcequ'elles sont exactement contenues dans leur Tout sans aucun reste.

Le Tout est appellé *Multiple* par rapport à ses parties aliquotes, parcequ'il est formé par une répétition suffisante de ces parties; & par la même raison, ces mêmes parties sont appellées *Sous-multiples* du Tout.

Les parties aliquantes sont celles qui ne mesurent pas exactement le Tout. Ainsi, 12 & 8 ne sont que les parties aliquantes de 20, parceque la répétition de 12, non plus que celle de 8, ne feront jamais 20.

Dans la Raison arithmétique, on ne considére le Tout, que comme composé de parties aliquantes. On en retranche une d'entre elles, laquelle jointe avec le Reste ou l'Excédent, est égale au Tout. Ayant la Raison 10 est à 3, l'Excédent est 7. Or $7+3=10$.

Il peut arriver néanmoins que la partie retranchée & l'Excédent soient aliquotes du Tout. Si je retranche 4 de 8, reste 4; & 4 est aliquote

de 8. Mais alors cette aliquote par accident est toujours regardée comme simple aliquante; parceque sa qualité d'aliquote n'influe pour rien dans l'opération.

C'est tout le contraire dans la Raison géométrique. On n'y considere que les parties aliquotes; parceque cette Raison n'est qu'une Division ou Fraction. Dans la Raison 15 est à 3, on demande combien de fois 15 contient 3: l'Exposant ou Quotient 5 donne la réponse. Ainsi, le Conséquent & l'Exposant de la Raison doivent être des aliquotes de l'Antécédent. Car si 3 est exactement cinq fois dans 15, 5 doit y être contenu précisément 3 fois. D'où il suit que le Conséquent ou *Diviseur* d'une Raison géométrique, multiplié par l'Exposant ou Quotient est égal à l'Antécédent ou *Dividende*.

Ces maximes sont indubitables dans les exemples allégués & dans mille autres qui viennent aisément à l'esprit. Mais il y en a souvent où l'application en seroit plus difficile. Je commence par la Raison arithmétique.

Dans la Raison de 5 à 12, où le premier Terme est le plus petit, peut-on dire que 5 soit le Tout, & que 12 en soit partie aliquante?

Je réponds que cela se peut très-bien dire; parcequ'il y a des cas où l'on est obligé de retrancher une Grandeur d'une plus petite. Si, par exemple, je dois 12 liv. & que je n'en aie que 5 pour les payer, il s'en manque 7 liv. que ma dette ne puisse être acquittée. On peut donc exprimer mes facultés par cette Soustraction 5−12, dont l'Excédent est−7.

Il faut observer, que de quelque maniere que l'on arrange les Termes de cette Raison, on a toujours le même Exposant, quoiqu'avec des signes contraires. Car $12-5=+7$, & $5-12=-7$. C'est pourquoi dans les Raisons arithmétiques où l'on n'auroit pas sujet de remarquer la différence des signes qui précédent les Exposans, on peut sans danger regarder le grand Terme comme le Tout; & le petit, comme partie aliquante.

Venons à la Raison géométrique qui exige plus d'attention. On peut demander d'abord comment le Conséquent pourroit toujours être regardé comme aliquote de l'Antécédent, attendu que le Conséquent n'en est quelquefois qu'une partie aliquante? Telle est la Raison de 12 à 8, de 10 à 9, & mille autres que l'on peut imaginer, dans lesquelles les Conséquens 8 & 9 ne sont pas de nature à mesurer exactement les Antécédens 12 & 10.

Je réponds que dans le cas où le Conséquent n'est pas exactement contenu dans l'Antécédent, ce sont les Aliquotes communes aux deux Termes qui mesurent le Tout. Dans la Raison 12 est à 8, 4 moitié de 8 est trois fois dans 12: & dans celle de 10 à 9, 1, neuviéme de 9 est dix fois dans 10. C'est précisément comme si on disoit 3 fois 4 est à deux fois 4; ou 10 fois 1 est à 9 fois 1. Aussi ces Raisons ont-elles toujours un Exposant, qui, multiplié par le Conséquent ou Diviseur, est égal à l'Antécédent. $\frac{12}{8}$ a pour Exposant $1+\frac{1}{2}$; & $1+\frac{1}{2}\times 8,=12$. De même $\frac{10}{9}$ a pour Exposant $1+\frac{1}{9}$: & $1+\frac{1}{9}\times 9=10$.

On peut demander en ſecond lieu quel eſt le Terme qui doit être regardé comme le Tout, & celui qu'on doit regarder comme Partie dans les Raiſons géométriques où l'Antécédent eſt moindre que le Conſéquent : par exemple, dans la Raiſon de 2 à 10.

Quelques perſonnes ſe ſont imaginées, que le plus grand Terme étoit toujours le Tout, & le petit Terme la Partie ; & qu'ainſi la Raiſon de 2 à 10 étoit la même que la Raiſon de 10 à 2. Car, diſent-ils, lorſqu'on a la Raiſon de 10 à 2, on demande combien de fois 10 contient 2 : au lieu que lorſqu'on a la Raiſon de 2 à 10, on demande combien de fois 2 eſt contenu dans 10, ce qui eſt véritablement la même choſe.

Mais ces perſonnes ſe trompent aſſurément : les deux Raiſons ſont fort différentes l'une de l'autre. Car la Raiſon géométrique n'étant réellement qu'une Fraction, celle de 10 à 2, donne dix Moitiés ou Cinq entiers, au lieu que celle de 2 à 10 ne donne que deux Dixiémes ou un Cinquiéme.

Il faut donc dire que dans ce cas-là même, l'Antécédent eſt regardé comme le Tout ou le Dividende ; & le Conſéquent comme l'Aliquote ou le Diviſeur ; & qu'alors on conſidere combien l'Antécédent contient d'Aliquotes de ſon Conſéquent. L'Aliquote commune ſert à meſurer les deux Termes ; & l'Expoſant de ces Raiſons, multiplié par le Conſéquent, donne un Produit égal à l'Antécédent. L'Expoſant de la Raiſon de 2 à 10 eſt $\frac{1}{5}$: & $\frac{1}{5}\times10=2$. Dans la Raiſon de 4 à 9, ou $\frac{4}{9}$ l'Expoſant eſt $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$: Or $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times9$

$=4$. Car $\frac{1}{3} \times 9 = \frac{9}{3} = 3$: & $\frac{1}{9} \times 9 = \frac{9}{9} = 1$: & $3 + 1 = 4$.

On voit par-là qu'il y a toujours une Raiſon exacte entre deux nombres quelconques, & par conſéquent entre deux Grandeurs qui peuvent être exactement meſurées par une Aliquote commune. Car cette Aliquote pourroit être exprimée par un nombre, au moins par l'unité, ou par des fractions de l'unité. Les deux Grandeurs ſeroient donc compoſées d'un nombre d'unités Aliquotes. Elles auroient donc entre elles un Rapport exact ; puiſque deux nombres quelconques ont toujours l'unité pour commune meſure. Auſſi pour exprimer que deux Grandeurs ſont *commenſurables* l'une à l'autre, on dit, que *leur Rapport eſt de nombre à nombre.*

Si donc il ſe trouvoit que deux Grandeurs n'euſſent point d'Aliquote commune, elles ſeroient *incommenſurables ;* & le Rapport qui ſeroit entre elles ne ſeroit pas de nombre à nombre, & n'auroit pas un nombre pour Expoſant. Ce Rapport eſt appellé *Raiſon ſourde.*

Après cet éclairciſſement, il eſt aiſé de comprendre que les deux Termes d'une Raiſon géométrique, multipliés ou diviſés par une même Grandeur, conſervent toujours le même Expoſant. Car il eſt manifeſte que ſi l'Antécédent contient un certain nombre de fois ſon Conſéquent ou les Aliquotes de ſon Conſéquent, le Double, le Triple, le Quadruple, &c. ou la Moitié, le Tiers, le Quart, &c. de l'Antécédent, contiendra autant de fois le Double, le Triple, le Quadruple, &c. ou la Moitié, le

Tiers, le Quart, &c. de ſon Conſéquent ou des Aliquotes de ſon Conſéquent. En effet, en multipliant ou en diviſant les deux Termes par la même Grandeur, je multiplie ou je diviſe leurs Aliquotes communes dans le même Rapport. Donc l'Expoſant ſera toujours le même dans tous ces cas.

On exprime cette vérité d'une maniere générale, en diſant, que *la Raiſon géométrique de deux Grandeurs, eſt la même que celle de leurs Equi-multiples, ou de leurs Equi-ſous-multiples.*

Les Raiſons ſourdes ne ſont pas même exceptées de cette régle. Car quelque ſoit le Rapport de deux Grandeurs incommenſurables, il ſera toujours le même dans leurs Equi-multiples & dans leurs Equi-ſous-multiples. Nous verrons dans la ſuite que le Côté & la Diagonale du Quarré ſont des Lignes incommenſurables. Mais il n'en eſt pas moins évident que leur Rapport, quelqu'il puiſſe être, eſt le même que celui de leurs Doubles & de leurs Moitiés.

CHAPITRE II.

LES PROPORTIONS.

DEux Raiſons égales forment une *Proportion :* & comme il y a deux ſortes de Raiſons, il y a auſſi deux ſortes de Proportions: l'*arithmétique*, qui conſiſte dans l'égalité de deux Raiſons arithmétiques; & la *géométrique*, compoſée de deux Raiſons géométriques égales,

les, c'est-à-dire, qui ont le même Exposant.

La comparaison des deux Raisons égales se fait de cette maniere. On dit qu'une premiere Grandeur est à une seconde, comme une troisiéme est à une quatriéme, c'est-à-dire, pour la Proportion arithmétique, que la premiere surpasse la seconde, comme la troisiéme surpasse la quatriéme: & pour la Proportion géométrique; que la premiere Grandeur contient la seconde ou les Aliquotes de la seconde, comme la troisiéme contient la quatriéme ou les Aliquotes de la quatriéme.

Ces comparaisons s'expriment de la maniere suivante pour abréger.

Proportion arithmétique. 8 · 6 ∵ 7 · 5

Proportion géométrique. 6 · 3 :: 4 · 2

Le Point que l'on met entre les deux Termes d'une Raison signifie *est à :* & les Points qui séparent les deux Raisons, expriment la comparaison, & signifient *comme.* On se sert de trois Points rangés en Triangle dans la Proportion arithmétique, & de quatre Points rangés en Quarré dans la géométrique.

Toute Proportion renferme donc quatre Termes : l'Antécédent & le Conséquent de la premiere Raison: l'Antécédent & le Conséquent de la seconde. Et de ces quatre Termes, le premier & le quatriéme sont appellés les *Extrêmes* de la Proportion: le second & le troisiéme, les *Moyens.*

Lorsqu'on compare plus de deux Raisons égales, on dit que la Proportion est *continuée.* On

Liv. II. III. Sect. I. Part. Chap. II.

l'exprime ainſi pour la Proportion arithméti-que. 10·8 ∵ 11·9 ∵ 7·5 ∵ 3·1 &c. Et pour la géométrique: 12·8::15·10::6·4 &c.

S'il arrive que dans une Proportion, le Conſéquent de la premiere Raiſon ſoit la même Grandeur que l'Antécédent de la ſeconde Raiſon, on la nomme Proportion *continue*; & la Grandeur commune aux deux Raiſons eſt appellée *Moyen proportionnel.* Mais au lieu de répéter deux fois le même Terme dans la formule, on ne l'écrit qu'une fois en faiſant précéder le ſigne *comme*, de cette maniere.

Proportion arithmétique continue: ∸ 8·6·4

Proportion géométrique continue: ∺ 8·4·2

Si la Proportion *continue* a plus de trois Termes, on l'appelle *Progreſſion.*

Progreſſion arithmétique: ∸ 1·2·3·4·5 &c.

Progreſſion géométrique: ∺ 1·2·4·8·16 &c.

En liſant ces chiffres on répéte le *Moyen proportionnel* à chaque mutation de Raiſon. 1 eſt à 2, comme 2 eſt à 3, comme 3 eſt à 4, comme 4 eſt à 5, &c. & pour la ſeconde Progreſſion: 1 eſt à 2, comme 2 eſt à 4, comme 4 eſt à 8, comme 8 eſt à 16, &c.

Il n'eſt pas néceſſaire de prouver que les quatre Termes qui ſont en Proportion arithmétique, ne forment point une Proportion géométrique; & que ceux qui forment cette derniere, ne ſont point en Proportion arithmétique. Les Raiſons 7 à 5 & 3 à 1 ſont égales comme

Raisons arithmétiques, mais inégales comme Raisons géométriques. De même, les Raisons 8 à 4 & 6 à 3 égales géométriques, sont inégales arithmétiques.

§. I.

PROPRIETE'S

de la Proportion arithmétique.

APrès avoir pris une idée générale des Proportions, il faut en établir les propriétés les plus importantes. Je commence par l'arithmétique.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

Dans toute Proportion arithmétique, la Somme des Extrêmes est égale à la Somme des Moyens.

Je dis *Somme*, & non pas *Produit*, parceque la Proportion arithmétique est composée de deux Soustractions égales, & que l'Addition est correspondante à la Soustraction.

PREMIERE PREUVE.

Dans une Proportion arithmétique, le second Terme est autant au-dessous du premier, que le troisiéme est au-dessus du quatriéme. Par conséquent, en joignant ensemble les deux moyens, l'on rend au Conséquent de la premiere Raison ce qu'il a de moins que son Antécédent. Mais c'est aux dépens de l'Antécédent

Liv. II. III. Sect. I. Part. Chap. II. §. I.

la quatriéme en soustrayant le Terme connu de la Somme des Moyens, si l'inconnu est un Extrême; ou de la Somme des Extrêmes, si l'inconnu est un des Termes moyens. Le reste sera la Grandeur cherchée.

Ayant $7 \cdot 5 \because 4 \cdot x$: ôtant 7 de $5+4$ Somme des Moyens, le reste 2 sera la valeur de x. Car $7 \cdot 5 \because 4 \cdot 2$.

Ou bien : ayant $7 \cdot 5 \because x \cdot 2$, ôtant 5 de $7+2$ Somme des Extrêmes, le reste 4 sera la valeur de x. Car $7 \cdot 5 \because 4 \cdot 2$.

Si l'on avoit un Terme inconnu dans une Proportion continue, il ne s'agiroit que de retrancher l'Extrême connu du Moyen proportionnel pris deux fois, si l'inconnu est un Extrême. Ayant $\div 6 \cdot 4 \cdot x$: on a $4+4=8$; d'où retranchant 6, reste $2=x$. Car $\div 6 \cdot 4 \cdot 2$.

Si le Terme inconnu est le Moyen proportionnel, on le trouvera en prenant la moitié de la Somme des Extrêmes. Exemple, $\div 8 \cdot x \cdot 2$: on a $8+2=10$, dont la moitié $5=x$. Car $\div 8 . 5 . 2$.

Il suit 2°. que 4 Grandeurs seront toujours en Proportion arithmétique, de quelque maniere qu'on les arrange, pourvu que la Somme des Extrêmes soit égale à la Somme des Moyens.

Ayant $9 \cdot 6 \because 5 \cdot 2$; l'on peut dire $6 \cdot 9 \because 2 \cdot 5$: ou bien, $5 \cdot 9 \because 2 \cdot 6$: ou bien, $9 \cdot 5 \because 6 \cdot 2$, &c. Dans les dernieres formules, les Raisons n'ont pas le même Exposant que dans la premiere. Mais il y a toujours Proportion, parceque la Somme des Extrêmes & celle des Moyens est toujours $5+6$ & $9+2=11$.

§. II.

PROPRIETÉS

de la Proportion géométrique.

COnsidérons maintenant la Proportion géométrique, à laquelle l'arithmétique a préparé les voies. Celle-ci n'étant que l'égalité de deux Soustractions, n'étoit susceptible que de l'opération correspondante, c'est-à-dire, de l'Addition. Mais dans la géométrique, qui consiste en Divisions ou fractions égales, on ne peut réunir les Termes que par la Multiplication.

Ainsi, puisque la nature de la Proportion arithmétique nous donne la *Somme* de ses Extrêmes égale à celle de ses Moyens, l'analogie nous conduit à présumer que la géométrique nous donnera le *Produit de* ses *Extrêmes égal au Produit de* ses *Moyens*. Je vais prouver en rigueur cette Proposition fondamentale.

PREMIERE PREUVE.

Si l'on multiplioit l'Antécédent & le Conséquent de la premiere Raison d'une Proportion géométrique, par le Conséquent de la seconde, les Produits ne pourroient être égaux, parce que ce seroient deux Grandeurs inégales, multipliées par une même Grandeur. Par exemple, si l'Antécédent étoit double du Conséquent, comme dans la Proportion suivante 8·4::6·3,

il est évident que le Produit de 8 par 3 est double du Produit de 4 par 3.

Mais comme l'Antécédent de la seconde Raison est à son Conséquent, comme l'Antécédent de la premiere est au sien, pour établir l'égalité des Produits, il faudroit, après avoir multiplié le premier Antécédent par le second Conséquent, multiplier le premier Conséquent, non par le second Conséquent, mais par le double de ce Conséquent, c'est-à-dire, par l'Antécédent de la seconde Raison.

Ainsi, au lieu de multiplier 4 par 3, qui ne donne que la moitié du Produit de 8 par le même 3, il faudroit, pour parvenir à l'égalité des Produits, multiplier 4 par 6 double de 3. On auroit donc $8 \times 3 = 4 \times 6$. Or, 4 & 6 sont les deux Moyens, & 8 & 3 les deux Extrêmes. Donc, *dans une Proportion géométrique, le Produit des Extrêmes est égal au Produit des Moyens.*

On voit bien que l'exemple allégué ne sert ici que d'éclaircissement. La Preuve est appuyée sur l'égalité du Rapport de l'Antécédent au Conséquent dans les deux Raisons. Or, cette égalité de Rapport subsiste, soit que l'Antécédent soit double, triple ou quadruple de son Conséquent, soit qu'il soit en telle autre Raison que l'on voudra.

Par exemple, si l'on a $12 \cdot 4 :: 9 \cdot 3$, il est évident que si l'on multiplie les deux premiers Termes par le quatriéme, 12×3 sera triple de 4×3, puisque 12 est triple de 4. Donc on établiroit l'égalité des Produits en multipliant 4 premier Moyen, non par le dernier Extrême

3, mais par le ſecond Terme moyen 9 triple de 3. On auroit donc 12×3=4×9, c'eſt-à-dire, le Produit des Extrêmes égal au Produit des Moyens.

Ce ſeroit la même choſe dans le cas où l'Antécédent ſeroit moindre que ſon Conſéquent dans les deux Raiſons. Par exemple, ayant 3·4::6·8: ſi l'on multiplie 3 & 4 par 8, l'on aura 24 & 32, c'eſt-à-dire, deux Produits dont le premier n'eſt que les trois quarts du ſecond, comme 3 à l'égard de 4, & 6 à l'égard de 8. Donç pour établir l'égalité des Produits, il faut multiplier 4, non par 8, trop grand d'un quart, mais par 6 trois quarts de 8. On a donc 3×8=4×6, c'eſt-à-dire, le Produit des Extrêmes égal au Produit des Moyens.

SECONDE PREUVE.

La Raiſon géométrique étant une fraction, l'Antécédent doit être regardé comme le Dividende; le Conſéquent, comme le Diviſeur; & l'Expoſant, comme le Quotient. Or le Diviſeur multiplié par le Quotient donne un Produit égal au Dividende. Donc le Conſéquent multiplié par l'Expoſant donnera une Grandeur égale à l'Antécédent.

Soit donc la Proportion géométrique, 9·3::6·2, dont l'Expoſant eſt 3. Si l'on multiplie chaque Conſéquent par l'Expoſant, on aura pour Conſéquens deux Grandeurs égales à chaque Antécédent, & la Proportion ſera transformée en celle-ci: 9·9::6·6. Proportion puérile à force d'être exacte; & dans laquelle le Produit

des Extrêmes & celui des Moyens sont égaux, même aux yeux. Car de part & d'autre les Grandeurs à multiplier sont les mêmes, 9 par 6, & 9 par 6. On aura donc 54 & 54 pour les deux Produits.

Maintenant si l'on divise l'un & l'autre Produit 54 & 54 par le même Exposant 3, les Quotiens doivent encore être égaux: ce sera 18 & 18. Or en divisant ainsi les Produits 54 & 54 par le même Exposant 3 qui avoit multiplié les deux Conséquens 3 & 2, je remets ces derniers Termes dans leur premier état. Donc, puisque 9×6 & 9×6 ont donné les deux Produits égaux 54 & 54 dans la Proportion transformée, 9×2, & 3×6 donneront dans la premiere Proportion les deux Produits égaux 18 & 18. Or 9 & 2 sont les Extrêmes, & 3 & 6 les Moyens. Donc *dans toute Proportion géométrique le Produit des Extrêmes est égal au Produit des Moyens.*

Telles sont les preuves métaphysiques de cette belle propriété de la Proportion géométrique. Je ne doute point qu'en y réfléchissant, on n'en pût trouver d'autres. Mais celles-ci suffisent. On y peut joindre encore celles que l'Algébre fournit. Si l'on en est curieux, on les trouvera dans les Livres qui traitent de cette Science.

Il est très-essentiel de remarquer que les preuves s'appliquent à toutes les Proportions géométriques, même à celles qui seroient composées de deux Raisons sourdes. Car l'incommensurabilité des deux Termes étant la même dans les deux Raisons, il est toujours vrai de dire, que de quelque maniere que l'Antécédent con-

tienne son Conséquent, il le contient de la même maniere dans les deux Raisons.

Quant à la Proportion géométrique continue, il est évident que le Moyen proportionnel multiplié par lui-même, est égal au Produit des deux Extrêmes; puisque le Moyen proportionnel est en même tems le Conséquent de la premiere Raison, & l'Antécédent de la seconde. Ayant ∻ 8·4·2, 4×4=8×2.

On voit par-là que le Moyen proportionnel multiplié par lui-même donne un Quarré; & le Produit des Extrêmes, un Rectangle. Car un Quarré n'est autre chose qu'une Grandeur multipliée par elle-même; & un Rectangle, le Produit de deux Grandeurs inégales. On a donc par la Proportion géométrique continue un Quarré égal à un Rectangle; & pour avoir ce Quarré, il n'est besoin que de trouver une Grandeur moyenne proportionnelle entre les deux Produisans du Rectangle.

Il suit 1°. que pour trouver le Terme inconnu d'une Proportion géométrique, il faut multiplier les deux Extrêmes ou les deux Moyens, & diviser le Produit par l'Extrême ou le Moyen connu: le Quotient sera la Grandeur cherchée. Exemple, 5·2::15·x : 2×15=30, & $\frac{30}{5}$=6. Donc 6=x.

Si l'on cherche un Extrême d'une Proportion continue, on le trouvera en divisant par l'Extrême connu le Produit du Moyen multiplié par lui-même. Exemple, ∻8·6·x. On a 6×6 =36; & $\frac{36}{8}$=4+$\frac{1}{2}$. Donc 4+$\frac{1}{2}$=x.

Lorsque le Moyen proportionnel est le Ter-

LIV. II. III. SECT. I. PART. CHAP. II. §. II.

me inconnu, il faut chercher la Racine quarrée du Produit des Extrêmes, c'est-à-dire, la Grandeur, qui, multipliée par elle-même, donneroit un Quarré égal au Rectangle produit des Extrêmes. Exemple, ∺ 8·x·2. On a 8×2=16, dont la Racine quarrée est 4; parceque 4×4=16.

Mais si cette Racine se trouve quelquefois, il arrive le plus souvent qu'on la chercheroit en vain dans les Rectangles formés par le Produit de deux nombres inégaux; parcequ'il s'en faut de beaucoup que tous ces Produits ne soient des Nombres quarrés. Par exemple, ayant ∺ 3·x·4. On a 3×4=12. Mais 12 n'est pas un Nombre quarré. Il est donc impossible de trouver en nombre la Racine du Quarré égal à ce Rectangle, quoiqu'on en puisse approcher à l'infini par des fractions. Mais on la trouve toujours, & très-exactement en Grandeur linéaire, comme on le verra dans la suite.

Il suit 2°. que les changemens que l'on pourroit faire dans les Termes d'une Proportion géométrique, n'empêchent pas qu'ils ne soient toujours en Proportion, tant que le Produit des Extrêmes est égal au Produit des Moyens.

Ayant 8·4::6·3.

Je puis dire: 8·6::4·3. Ce changement se fait *permutando*.

Il se fait *alternando*, en disant, 3·4::6·8.

Invertendo, en disant, 4·8::3·6.

On a dans tous ces changemens, ainsi que dans la premiere Proportion: 4×6=8×3.

On peut encore sans détruire la Proportion,

faire d'autres changemens dans les Termes dont elle est composée, soit en multipliant ces Termes, ou les divisant par une même Grandeur, soit en ajoutant les Conséquens aux Antécédens, ou retranchant les Conséquens des Antécédens, pour comparer la somme des deux Termes, ou l'Excédent de l'un sur l'autre avec les Conséquens laissés dans leur simplicité. Mais il est inutile pour notre objet d'entrer dans ce détail. Je ne prétends pas donner ici un Traité complet des Raisons & des Proportions.

CHAPITRE III.

Raisons composées, inverses, doublées & triplées.

§. I.

RAISONS COMPOSÉES.

LEs Raisons *composées* supposent les Raisons *composantes*; & celles-ci sont les *simples*, dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent.

De plusieurs Raisons simples on peut faire une Raison composée, en unissant les Antécédens avec les Antécédens, & les Conséquens avec les Conséquens, de la maniere qui convient à la nature des Raisons que l'on veut composer.

S'il s'agit de Raisons arithmétiques, l'union des Termes *homologues* se doit faire par Addi-

tion; & par Multiplication, s'il s'agit de Raisons géométriques.

Les Raisons étant de véritables Grandeurs; & ces Grandeurs étant exprimées par l'Exposant, comme on l'a prouvé ci-dessus, composer plusieurs Raisons simples, c'est de leurs Exposans en faire un seul, soit par Addition, soit par Multiplication.

Ayant les deux Raisons arithmétiques 5·3 & 7·4, dont les Exposans sont 2 & 3, la Raison composée donnera 12·7, dont l'Exposant est 5. Or 5=2+3 Exposans des deux Raisons simples.

Ayant aussi les deux Raisons géométriques 10·5 & 6·2, dont les Exposans sont 2 & 3, la Raison composée donnera 60·10, dont l'Exposant 6 est le Produit de 2 par 3 Exposans des Raisons simples.

On feroit aisément une Raison composée de trois Raisons simples, arithmétiques ou géométriques, & même d'un plus grand nombre, s'il en étoit besoin.

Au moyen de cette explication, on entend aisément le sens de cette Proposition de Géométrie : *Deux Grandeurs sont entre elles en Raison composée de leurs Produisans homologues.*

Soient, par exemple, deux Rectangles dont la Base du premier soit 8, & la Hauteur 6; & dont la Base du second soit 4, & la Hauteur 2. Pour comparer ces deux Rectangles, il faut examiner le Rapport de la Base du premier à la Base du second, & de la Hauteur du premier à la Hauteur du second. L'on a donc les deux Raisons suivantes 8·4 & 6·2, c'est-à-dire, que

la Base du premier est double de la Base du second, & que la Hauteur du premier est triple de la Hauteur du second.

Maintenant pour sçavoir ce qui résulte de ces deux comparaisons, il faut multiplier d'un côté les deux Antécédens, & de l'autre les deux Conséquens, 8 par 6, & 4 par 2; c'est-à-dire, faire une Raison composée des deux Raisons simples. Car les deux Antécédens sont la Base & la Hauteur du premier Rectangle, c'est-à-dire, ses deux Produisans: & les deux Conséquens 4 & 2 sont les Produisans du second Rectangle, c'est-à-dire, sa Base & sa Hauteur. Donc *ces deux Rectangles*, formés par leurs Produisans, *sont entre eux en Raison composée de leurs Produisans homologues*, c'est-à-dire, comme 8×6=48 est à 4×2=8. L'Exposant de cette Raison composée est 6 Produit de 2 Exposant de la Raison de 8 à 4, par 3 Exposant de l'autre Raison simple de 6 à 2. L'Exposant 6 nous apprend que le premier Rectangle contient six fois la Surface du second.

Soient encore deux Parallélipipèdes, dont le premier ait pour ses trois Produisans 4, 5, 6; & le second, 1, 2, 3, la comparaison des trois Produisans homologues donnera trois Raisons simples, celle de 4 à 1 dont l'Exposant est 4; celle de 5 à 2 dont l'Exposant est $2+\frac{1}{2}$; & celle de 6 à 3 dont l'Exposant est 2.

Pour avoir le résultat de ces trois comparaisons, il faut multiplier les trois Antécédens 4, 5, 6 dont le Produit est 120, & les trois Conséquens 1, 2, 3 dont le Produit est 6. Les deux

Parallélipipédes sont donc entre eux en Raison composée de leurs trois Produisans homologues, c'est-à-dire, comme 120 est à 6 : & 20 Exposant de cette Raison, montre que le premier Parallélipipéde contient 20 fois la solidité du second. Or, l'Exposant 20 est le Produit des Exposans des trois Raisons simples 4, $2+\frac{1}{2}$, & 2 multipliés les uns par les autres.

§. II.

RAISONS INVERSES.

EN réunissant deux Raisons simples dans une seule Raison composée, il arrive quelquefois que les deux Termes de cette derniere sont deux Nombres égaux ou deux Grandeurs égales, quoique les Raisons simples soient fort différentes l'une de l'autre.

Ayant, par exemple, les deux Raisons arithmétiques 7·3 & 2·6, la Raison composée sera $7+2$ est à $3+6$. Or $7+2=9$ ainsi que $3+6$.

De même, ayant les deux Raisons géométriques : 8·4 & 3·6, la Raison composée sera 8×3 est à 4×6. Or $8\times3=24$, aussi-bien que 4×6.

Cette égalité, dans les deux Termes de la Raison composée, fait sentir que les Raisons simples, quoique différentes, ont néanmoins une analogie proportionnelle. Car on peut dire que 7 surpasse 3, comme 2 est surpassé par 6 ; & que 8 contient 4, comme 3 est contenu dans 6 : ce qui renferme manifestement une Proportion, quoiqu'elle ne s'offre pas dans un ordre direct & naturel.

Pour

Pour mettre les 4 Termes en Proportion, il suffit de transposer ceux de l'une des Raisons à son choix, en ne touchant point à l'autre Raison. 7·3 ∴ 6·2 est une Proportion arithmétique: & 8·4::6·3 est une Proportion géométrique.

Les Raisons qui ont cette propriété sont appellées *inverses* ou *réciproques*, parceque pour montrer la Proportion qui s'y trouve cachée, il faut renverser l'ordre des Termes d'une des Raisons, c'est-à-dire, mettre l'Antécédent à la place du Conséquent, & le Conséquent à la place de l'Antécédent.

Les Exposans de la Raison composée de Raisons inverses, ne s'écartent pas de la régle ordinaire. Car l'Exposant de la Raison arithmétique de 7 à 3 est +4; & celui de 2 à 6 est −4. Or 4−4=0: ce qui montre que la Raison composée n'a point d'Exposant. Car 7+2, & 3+6=9. Or qui de 9 ôte 9 reste 0.

Dans la Raison composée de Raisons géométrique inverses, l'Exposant est toujours 1. Car l'Exposant de la Raison simple de 8 à 4, est 2; & celui de 3 à 6, est $\frac{1}{2}$. Or $2 \times \frac{1}{2} = 1$: ce qui montre l'égalité des Termes dans la Raison composée. Car 24 produit de 8 par 3, est contenu une fois dans 24 Produit de 4 par 6.

Je n'insiste pas sur les Raisons arithmétiques inverses, qui n'ont aucune application dans la Géométrie. Mais on fait beaucoup d'usage des géométriques inverses; & c'est cet usage qu'il faut expliquer.

On dit quelquefois que *deux grandeurs sont en Raison inverse ou réciproque de leurs Produi-*

sans homologues. Pour entendre ce langage, il faut supposer que deux grandeurs que l'on compare, ont chacune deux Produisans. Ce sont, par exemple, deux Rectangles. Pour trouver leur Rapport mutuel, il est naturel de comparer leurs Produisans homologues, la Base à la Base, & la Hauteur à la Hauteur; & la Raison composée de ces deux Raisons simples, fera voir le Rapport de ces deux Figures, ainsi que nous venons de l'expliquer dans le §. précédent.

Si les Raisons simples sont égales, on dit que les Rectangles sont *en Raison directe de leurs Produisans homologues*, c'est-à-dire, que leurs Produisans homologues comparés dans l'ordre naturel, forment une Proportion géométrique. Que la Base du premier Rectangle soit 10; celle du second, 6; la Hauteur du premier, 5; celle du second, 3. Ces 4 Termes, sans les déranger, donnent la Proportion: 10·6::5·3. Nous verrons dans la suite que ces deux Rectangles sont semblables, sans être égaux.

Mais s'il arrivoit que les Rapports directs des Produisans homologues ne fussent pas égaux; & que l'on trouvât cette égalité en bouleversant l'ordre des Termes dans l'une des Raisons, on diroit alors que les deux Rectangles sont *en Raison inverse ou réciproque de leurs Produisans homologues*.

Par exemple, la Base du premier étant 8; celle du second, 4; la Hauteur du premier, 3; celle du second, 6; la Raison de 8 à 4 n'est pas la même que celle de 3 à 6. Mais, après avoir comparé la Base du premier à celle du second;

si l'on renverse l'ordre naturel, & que l'on compare la Hauteur du second à celle du premier, les Raisons seront égales, & l'on aura la Proportion géométrique : 8 · 4 :: 6 · 3.

Ainsi, deux grandeurs sont entre elles *en Raison inverse ou réciproque de leurs Produisans homologues*, lorsque les deux Produisans de l'une sont les Moyens ou les Extrêmes d'une Proportion, dont les deux Produisans de l'autre sont les Extrêmes ou les Moyens.

D'où il suit, que ces deux grandeurs sont *égales*; puisque dans toute Proportion géométrique le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens.

---

§. III.

Raisons arithmétiques doublées & triplées.

LA Raison composée de deux Raisons égales, est une Raison *doublée*; & la Raison composée de trois Raisons égales, est une Raison *triplée*. Toute Raison doublée ou triplée est donc une Raison *composée*; mais toute Raison composée n'est pas pour cela doublée ou triplée : il faut que les Raisons composantes soient égales.

Pour faire une Raison arithmétique doublée ou triplée, il ne s'agit que de former une Somme des Antécédens & une Somme des Conséquens de deux ou trois Raisons simples égales. Ayant, par exemple, les trois Raisons égales : 6 · 4, 7 · 5, 10 · 8, la Somme des deux premieres

13 & 9 est une Raison doublée; & la Somme des trois 23 & 17 est une Raison triplée.

On voit sans peine que la Raison doublée arithmétique est *double* de la simple; & que la Raison triplée en est *triple*. Car en joignant ensemble les grands Termes d'un côté & les petits de l'autre, on double ou l'on triple l'Excédent des grands sur les petits. Dans l'exemple proposé, l'Exposant des Raisons simples est 2: celui de la Raison doublée 13 à 9 est 4: & celui de la Raison triplée 23 à 17 est 6.

Il résulte de-là, qu'ayant deux Raisons arithmétiques simples & égales 6 · 4 & 7 · 5, on peut en faire une Raison doublée, soit en unissant les deux Antécédens d'une part, & les deux Conséquens de l'autre, pour faire 13 à 9; soit en doublant les Termes d'une des deux Raisons simples prises à volonté. En doublant la premiere Raison 6 à 4, on aura 12 à 8: & l'on auroit 14 à 10 en doublant la seconde Raison 7 à 5.

En effet, la grandeur d'une Raison est indépendante de la grandeur de ses deux Termes: elle consiste dans la grandeur de l'Exposant. On peut donc, sans rien changer dans la valeur des Raisons, substituer telle Raison égale que l'on voudra, & répéter la même Raison à la place de toutes celles qui lui sont égales, puisqu'on aura toujours le même Exposant. La Raison de 6 à 4 est la même grandeur que la Raison de 7 à 5. Je pourrois donc supposer que j'ai deux fois la Raison de 6 à 4, ou deux fois la Raison de 7 à 5. La Raison doublée des Raisons 6 à 4

& 7 à 5, est 13 à 9, dont l'Exposant est 4 : la Raison doublée de la Raison simple 6 à 4 répétée deux fois, est 12 à 8, dont l'Exposant est aussi 4 : & la Raison doublée de la Raison simple 7 à 5 répétée deux fois, est 14 à 10, dont l'Exposant est encore 4.

On doit dire la même chose de la Raison triplée arithmétique. Il est indifférent qu'on la forme par la Somme des trois Antécédens & par celle des trois Conséquens ; ou bien par le triple de l'Antécédent & du Conséquent d'une des trois Raisons simples prise à volonté. Ayant les trois Raisons arithmétiques égales 6·4, 7·5, 10·8, la Raison triplée donne 23 à 17, dont l'Exposant est 6. Or l'aura la même Raison en triplant une des Raisons simples, & en disant 18 à 12, ou 21 à 15, ou bien 30 à 24. Car l'Exposant de toutes ces Raisons est également 6.

Les Géométres expriment ces vérités par les deux Propositions suivantes, qu'on entendra aisément après ce que nous venons de dire.

1. *L'Antécédent d'une Raison arithmétique doublée est à son Conséquent, comme le double de l'Antécédent d'une des Raisons simples, est au double du Conséquent de la même Raison.* Dans notre exemple 13·9 ∵ 12·8 ∵ 14·10 : parceque l'Exposant de ces trois Raisons est le même, c'est-à-dire, 4.

2. *L'Antécédent d'une Raison arithmétique triplée est à son Conséquent, comme le triple de l'Antécédent d'une des Raisons simples, est au triple du Conséquent de la même Raison.* Dans notre exemple 23·17 ∵ 18·12 ∵ 21·15 ∵ 30·

24 : parceque l'Exposant de ces 4 Raisons est le même, c'est-à-dire, 6.

§. IV.

Raisons géométriques doublées.

CONsidérons maintenant les Raisons géométriques doublées & triplées : la même analogie nous guidera, en observant seulement qu'il s'agit ici de Multiplication, & non pas d'Addition.

Pour doubler deux Raisons géométriques égales, telles que celles-ci, 12 à 4 & 6 à 2, dont l'Exposant est 3, il faut multiplier les deux Antécédens l'un par l'autre, & de même les deux Conséquens, 12 par 6, & 4 par 2 ; & les deux Produits 72 & 8 seront la Raison doublée, dont l'Exposant est 9.

La Raison doublée arithmétique est double de la simple, parcequ'elle est formée par Addition. Il en doit être tout autrement dans la Raison géométrique doublée, parcequ'elle est formée par la Multiplication. L'Exposant de la Raison géométrique de 12 à 4 ou de 6 à 2 est 3 ; & l'Exposant de la Raison doublée de ces deux Raisons simples est 9, parceque 8 est neuf fois dans 72.

Ce n'est pas qu'une Raison géométrique ne puisse être double d'une autre. Par exemple, la Raison de 12 à 3 est double de la Raison de 8 à 4, parceque 12 contient 3 quatre fois, & que 8

ne contient 4 que deux fois. Mais cette Raison double n'est point doublée : c'est une Raison simple comparée à une autre Raison simple. Ne soyons dons pas surpris que la Raison géométrique doublée soit ordinairement plus du double de la Raison simple, puisqu'elle est formée par la Multiplication de deux Raisons égales. (*a*)

L'exemple proposé nous fait voir que l'Exposant d'une Raison géométrique doublée, dont les Raisons composantes sont de nombre à nombre, est toujours le nombre quarré de l'Exposant de la Raison simple. Car 9 Exposant de la Raison doublée 72 à 8, est le Quarré de 3 Exposant des Raisons simples 12 à 4, & 6 à 2.

En effet, la Raison étant une véritable grandeur exprimée par l'Exposant, multiplier une Raison par une Raison égale, c'est multiplier une grandeur par elle-même ; & par conséquent former un Quarré. Donc le nombre Exposant des Raisons simples égales est multiplié par lui-même dans la Raison géométrique doublée, & par conséquent doit faire un nombre quarré.

Mais si l'on avoit pour Raisons simples égales deux Raisons sourdes, dont l'Exposant, quel

(*a*) La Raison doublée n'est double de la simple, que lorsque celle-ci a 2 pour Exposant. La Raison doublée a pour lors 4 pour Exposant ; & 4 est double de 2. Mais c'est que 4 est le seul Nombre quarré qui soit double de sa Racine. Les Nombres quarrés sont à l'égard de leur Racine selon la Progression des Nombres 1, 2, 3, &c. Le Quarré de 1 est égal à sa Racine : le Quarré de 2 est double : le Quarré de 3, triple : le Quarré de 4, quadruple : le Quarré de 5, quintuple, &c.

qu'il soit, ne peut être exprimé par un nombre, l'Exposant de la Raison doublée, quoiqu'exprimé par un nombre, ne seroit pas un nombre quarré. Nous verrons dans la suite l'usage de cette exception.

Il faut observer ici, comme par rapport aux Raisons arithmétiques, que pour faire une Raison doublée de deux Raisons géométriques égales, il est indifférent de multiplier les deux Antécédens l'un par l'autre, & ensuite les deux Conséquens, ou bien, de multiplier par lui-même l'Antécédent, & ensuite le Conséquent d'une des Raisons simples prise à volonté. Ayant les deux Raisons égales 12 à 4, & 6 à 2, j'aurai également leur Raison doublée en disant 12x6 =72 est à 4x2=8: ou bien, 12x12=144 est à 4x4=16: ou bien, 6x6=36 est à 2x2=4. Car ces trois Raisons ont pour Exposant le même Nombre 9.

On le comprendra aisément, si l'on fait attention que deux Raisons égales sont deux grandeurs égales, sous différentes expressions, & représentées par le même Exposant. On peut donc les substituer l'une à l'autre, sans qu'il en résulte le moindre changement dans leur valeur. Par conséquent, il est indifférent de les multiplier l'une par l'autre, ou de multiplier une des deux par elle-même.

Les Géomêtres expriment cette vérité par la Proposition suivante: *L'Antécédent d'une Raison géométrique doublée est à son Conséquent, comme le Quarré de l'Antécédent d'une des Raisons simples est au Quarré du Conséquent de la même*

Raiſon. Dans notre exemple 12×6 eſt à 4×2, comme le Quarré de 12 eſt au Quarré de 4, ou comme le Quarré de 6 eſt au Quarré de 2. Car chacune de ces trois Raiſons a 9 pour Expoſant.

Pour appliquer cette Propoſition à la Géométrie, on dit que *deux Figures dont les Produiſans forment une Proportion directe, ſont entre elles, comme les Quarrés de leurs Produiſans homologues.*

Soient deux Rectangles dont la Baſe 8 du premier ſoit à la Baſe 4 du ſecond, comme la Hauteur 6 du premier eſt à la Hauteur 3 du ſecond: (8·4::6·3) il eſt évident que la Surface du premier Rectangle eſt formée par le produit des deux Antécédens 8 & 6; & que le produit des Conſéquens 4 & 3 forme la Surface du ſecond. Ces Rectangles ſont donc en Raiſon doublée de la Baſe à la Baſe, & de la Hauteur à la Hauteur. Or cette Raiſon doublée eſt la même, ſoit que l'on multiplie les deux Antécédens & les deux Conſéquens, ſoit que l'on multiplie par elle-même une des deux Raiſons ſimples. Donc ces Rectangles qui ſont enſemble, comme 8×6 eſt à 4×3, ſont auſſi comme le Quarré de 8, Baſe du premier, eſt au Quarré de 4, Baſe du ſecond; ou comme le Quarré de 6, Hauteur du premier, eſt au Quarré de 3 Hauteur du ſecond. L'Expoſant de chacune de ces trois Raiſons compoſées eſt 4: ce qui montre que le premier Rectangle eſt quadruple du ſecond, c'eſt-à-dire, que le premier eſt au ſecond comme 4 eſt à 1.

§. V.

Raisons géométriques triplées.

LES Raisons géométriques doublées sont composées de deux Raisons égales. Il en faut trois pour faire une Raison triplée, c'est-à-dire, que la Raison triplée est le produit des Antécédens de trois Raisons géométriques égales comparé au produit des trois Conséquens. A cela près, tout ce qu'on a dit sur la Raison doublée s'applique de soi-même à la Raison triplée, sans qu'il soit besoin d'entrer dans un grand détail.

1. Une Raison triplée est fort différente d'une Raison triple. Celle-ci est une Raison simple dont l'Antécédent contiendroit son Conséquent trois fois plus, que l'Antécédent d'une autre Raison simple ne contient le sien. Par exemple, si l'on compare la Raison de 12 à 2 à la Raison de 6 à 3, on dira que la premiere dont l'Exposant est 6, est triple de la seconde dont l'Exposant n'est que 2. Mais dans la Raison triplée, l'Exposant a tout un autre Rapport à l'Exposant des Raisons simples. Ayant les trois Raisons égales 12 à 4, 6 à 2, 3 à 1, dont l'Exposant est 3, la Raison triplée donne 216 à 8, dont l'Exposant est 27.

2. Dans cet exemple, l'Exposant 27 est Cube de 3 Exposant des Raisons simples. Car 3 multiplié deux fois par lui-même, fait 27. Et cela

doit être ainsi dans toutes les Raisons triplées. Car trois Raisons égales, étant la même grandeur sous trois expressions différentes, & représentée par le même Exposant, multiplier deux fois cette grandeur par elle-même, c'est en faire un Cube. Donc dans toute Raison triplée, l'Exposant doit être le Cube de l'Exposant de la Raison simple.

Je dis Cube, & non pas nombre cubique; car l'Exposant de la Raison triplée n'est un nombre cubique, que lorsque les Raisons simples sont de nombre à nombre, c'est-à-dire, lorsque leur Exposant peut être exprimé par un nombre. Mais si les Raisons simples sont sourdes, l'Exposant de la Raison triplée ne seroit pas un nombre cubique, quand même il pourroit être exprimé par un nombre.

3. Puisque les trois Raisons égales ne sont qu'une même grandeur répétée trois fois, elles peuvent être substituées l'une à l'autre, sans que leur valeur éprouve aucun changement. Donc pour faire une Raison triplée, il est indifférent de multiplier les trois Raisons simples l'une par l'autre, c'est-à-dire, les Antécédens par les Antécédens, & les Conséquens par les Conséquens; ou bien de multiplier deux fois par elle-même une des Raisons simples prise à volonté. A la place des trois Raisons égales 12 à 4, 6 à 2, 3 à 1, je puis mettre celles-ci, 12 à 4, 12 à 4, 12 à 4: ou bien 6 à 2, 6 à 2, 6 à 2: ou enfin 3 à 1, 3 à 1, 3 à 1. Dans ces trois derniers exemples j'aurai pour Raison triplée la Raison du Cube de 12 au Cube de 4; ou du Cube de 6 au Cube

de 2; ou enfin du Cube de 3 au Cube de 1 : toutes Raisons égales, & dont l'Exposant 27 est le même que celui de la Raison triplée à l'ordinaire 216 à 8.

C'est ce que les Géométres expriment par la Proposition suivante : *L'Antécédent d'une Raison triplée est à son Conséquent, comme le Cube de l'Antécédent de l'une des Raisons simples, est au Cube du Conséquent de la même Raison.*

Pour appliquer cette Proposition à la Géométrie, supposons que les trois Produisans d'un Solide forment avec les trois Produisans d'un autre Solide trois Raisons géométriques égales & directes, on dit que *ces Solides sont entre eux, comme les Cubes de leurs Produisans homologues.*

Car ces deux Figures sont entre elles en Raison triplée de la Longueur à la Longueur, de la Largeur à la Largeur, de la Profondeur à la Profondeur. Or cette Raison est la même que celle du Cube de l'Antécédent d'une des Raisons simples, au Cube de son Conséquent. Donc les deux Figures sont entre elles, comme le Cube de la Longueur de l'une, est au Cube de la Longueur de l'autre; ou comme le Cube de la Largeur est au Cube de la Largeur; ou enfin, comme le Cube de la Profondeur est au Cube de la Profondeur.

Je ne pousserai pas plus loin ce petit Traité, dans lequel je n'ai pas eu dessein d'épuiser tout ce qui concerne la nature & les propriétés des Raisons & des Proportions. On y pourroit ajouter sans doute beaucoup de choses intéressantes & curieuses. On les trouvera dans d'autres Ou-

vrages. J'ai cru devoir me borner ſcrupuleuſement à développer les notions dont on a beſoin pour entrer dans la Théorie des *Figures ſemblables*; & ſur tout à les préſenter d'une maniere ſimple & neuve. C'eſt aux Sçavans à juger ſi j'ai réuſſi.

Quoique les Raiſons & les Proportions arithmétiques ne ſoient pas d'un grand uſage dans la Géométrie, j'ai cru néanmoins en devoir approfondir la nature, pour préparer les voies à l'examen des Raiſons & des Proportions géométriques. Il m'a paru que les deux manieres dont on peut comparer deux grandeurs, par *Excédent*, ou par *Quotient*, ſont fondées ſur les mêmes principes, & s'éclairciſſent mutuellement. Les propriétés des Raiſons & des Proportions arithmétiques ſont plus palpables & plus aiſées à ſaiſir, parcequ'il eſt plus facile d'apprendre les régles de l'Addition & de la Souſtraction, que celles de la Multiplication & de la Diviſion. Mais quiconque ſçaura parfaitement ajouter & ſouſtraire, apprendra ſans peine à multiplier & à diviſer.



TROISIÈME SECTION.

SECONDE PARTIE.

Les Figures semblables considérées selon leur Périmétre.

CHAPITRE PREMIER.

Notions générales sur les Figures semblables.

TOutes les Figures planes ont entre elles une espéce de ressemblance; Toutes sont terminées par des Lignes dont le contour les sépare de tout ce qui peut les environner: toutes renferment un espace ou plus grand ou plus petit, mais toujours de même nature: toutes peuvent être conçues comme formées par un tissu de Lignes élémentaires posées parallelement & sans intervalle: toutes enfin ont deux Produisans, qui multipliés l'un par l'autre, font connoître leur étendue.

Il est encore une ressemblance plus exacte & plus précise entre les Figures de même espéce. Un Triangle ressemble plus à un autre Triangle, qu'au Quadrilatere, au Pentagône, au Cercle; & l'on trouvera des Rapports plus resserrés à mesure que l'on descendra dans les subdivisions de chaque espéce. Un Triangle rectangle ressemble plus à un autre Triangle rectangle, qu'au

Triangle acutangle : un Parallélogramme ; à un autre Parallélogramme qu'au Trapèze, &c.

Ces ressemblances partielles ne feront point l'objet de nos recherches. Elles ne nous apprendroient que ce que nous avons déja découvert sur la nature & les propriétés des diverses espéces de Figures. La ressemblance parfaite fixera notre attention.

Mais ne confondons point la ressemblance parfaite avec la parfaite égalité. Deux Figures peuvent être parfaitement égales, & n'avoir entre elles que cette ressemblance générique dont nous avons d'abord parlé. Un Triangle & un Cercle peuvent être parfaitement égaux ; car l'espace est homogène dans toutes les Figures. Ce n'est donc pas de l'espace compris que les Figures tirent leur ressemblance ; mais uniquement de la forme de leur Périmétre, parceque le Périmétre seul constitue les diverses espéces de Polygônes.

Il est vrai que si deux Figures avoient précisément la même forme, & renfermoient le même espace, ce seroit là ressemblance la plus complette qu'on pût imaginer : ce seroit même une identité, du moins pour un Géométre. Ces Figures exactement posées l'une sur l'autre, se confondroient tellement, que ce ne seroit plus qu'une seule & même chose. On pourroit dire qu'à force de se ressembler, elles ne se ressembleroient point. Eloignons donc de notre esprit toute égalité d'espace, & cherchons la parfaite ressemblance dans les Figures de même forme, quelques différentes qu'elles soient en grandeur.

Liv. II. III. Sect. II. Part. Chap. I.

Il n'est pas besoin d'être Géométre pour se connoître en ressemblance. Les moins sçavans la saisissent souvent avec plus de finesse & de sagacité. Un enfant est frappé en trouvant tous les traits de son pere dans un portrait en miniature. Dites-lui qu'il se trompe, puisque son pere est bien plus grand que l'image, l'objection ne l'ébranlera point du tout. C'est que le bon sens dicte à tous les hommes, qu'il ne faut point chercher la ressemblance dans l'identité de grandeur entre la chose représentante & la chose représentée, mais uniquement dans l'uniformité du contour, & dans la proportion des traits qui forment les Figures. Nous avons tous une idée nette de la Proportion, quoique le sentiment n'en soit pas également vif dans tous. Tel, en regardant la face d'un bâtiment connu, peint sur une toile, s'écriera que les fenêtres sont écrasées ; que les colonnes sont trop petites ou trop grandes, trop grosses ou trop menues ; que l'angle qui joint deux corps de logis est trop pointu ou trop évasé. Cet homme n'est pas Géométre, je le suppose ; mais il a naturellement la science des proportions, & juge des ressemblances avec justesse, selon que cette Géométrie naturelle est plus développée dans son esprit.

Suivons un habile Arpenteur dans ses opérations. Il s'agit de lever le plan d'un vaste jardin. L'Artiste intelligent en mesure le contour ; il constate le nombre de toises que chaque pan de murailles contient en longueur, & prend exactement les Angles que les côtés environnans forment par leur jonction.

Après

Après ces préparatifs, l'Arpenteur conſtruit une *Echelle* dont il ne s'écarte point. Il ſçait bien que le Plan du jardin doit être ſans comparaiſon plus petit que le jardin même. Une petite ligne invariable lui repréſente une toiſe, ou même une plus grande longueur. Il commence par tirer une ligne qui contienne autant de ces petites meſures, qu'il y en a de grandes dans le premier côté du jardin qu'il veut exprimer ſur le papier. Il y joint une ſeconde ligne avec les mêmes conditions; mais avant que de la tracer, il détermine l'Angle qu'elle doit faire avec la premiere : il paſſe à la troiſiéme & aux ſuivantes en obſervant la même méthode, & parvient enfin à finir le contour de ſon Plan.

Ce jardin n'eſt pas une place nue : on y voit un parterre, des allées, des boſquets, &c. L'Arpenteur mettra tous ces détails dans ſon Plan; & chaque choſe ſera à ſa place, pourvu qu'attentif à ſuivre ſon échelle, il donne à chaque partie la même Longueur & la même Largeur proportionnelle, & qu'il rende exactement la valeur des Angles. Avec ces précautions, le Plan ſera parfaitement ſemblable à l'original.

Mais qu'eſt-il beſoin d'avoir recours à ces exemples pour nous faire entendre? Le chemin que nous avons déja fait dans la Géométrie ſuffit de reſte pour nous donner une idée diſtincte des Figures ſemblables. En effet, quel a été l'objet de nos méditations? étoient-ce des Figures d'une grandeur déterminée? nullement. Nous n'avons conſidéré que la forme qui les rend de telle ou telle eſpéce; que la valeur de leurs An-

gles; que la ſituation reſpective des Côtés environnans. Ces Figures deſſinées que nous avions ſous les yeux pour fixer notre imagination, nous repréſentoient toutes celles que l'on peut tracer avec les mêmes conditions, abſtraction faite de leur grandeur particuliere; & nous avons compris que les propriétés de ces Figures étoient indépendantes de leur volume. C'eſt donc ſur les Figures ſemblables que nous avons raiſonné juſqu'ici, quoique nous ayons remis à un autre tems à réfléchir ſur ce caractere de ſimilitude.

Il réſulte de tout ceci, que trois conditions ſont néceſſaires, pour que deux Figures ſoient parfaitement ſemblables.

Il faut 1°. que ce ſoient deux Polygônes de même nombre de Côtés.

2°. Que les Côtés homologues ou correſpondans ſoient proportionnels, c'eſt-à-dire, que le Côté A de la premiere Figure ſoit en grandeur au Côté *a* de la ſeconde, comme le Côté B eſt au Côté *b*, comme le Côté C eſt au Côté *c*, &c. En un mot, que ſi deux Côtés correſpondans de deux Figures ſont diviſés en un nombre quelconque d'Aliquotes, grandes dans la grande Figure, petites dans la petite, les grandes Aliquotes qui meſureront le ſecond Côté de la grande Figure aient le même Rapport aux petites Aliquotes qui meſureront le ſecond Côté de la ſeconde Figure, &c.

Il faut 3°. que les Côtés correſpondans des deux Figures ſoient reſpectivement dans la même ſituation, c'eſt-à-dire, qu'étant également

inclinés de part & d'autre ſur les Côtés contigus, ils forment avec eux les mêmes Angles : ainſi les Angles de deux Polygônes ſemblab ls ſont égaux, chacun à chacun.

Je dis égaux, & non pas ſemblables ni proportionnels. Les Commençans s'y trompent quelquefois, en confondant ces trois expreſſions. La grandeur des Côtés ne fait rien du tout à la grandeur des Angles, qui dans les Figures ſemblables doivent être d'une égalité abſolue, parceque l'inclinaiſon des Côtés correſpondans eſt abſolument la même. La *Similitude* ſe dit des Figures priſes en leur entier ; la *Proportion*, de leurs Côtés homologues ; & l'*Egalité*, des Angles correſpondans.

Pour développer l'exacte Proportion qui doit être entre les Côtés homologues des Figures ſemblables, on établit les deux Propoſitions ſuivantes.

I.

Les Périmétres de deux Figures ſemblables ſont entre eux, comme un Côté de la premiere Figure eſt au Côté homologue de la ſeconde. Fig. 1.

Car le Périmétre n'eſt autre choſe que la Somme des Côtés d'une Figure. Si donc chaque Côté de la premiere Figure eſt en Raiſon égale avec chaque Côté correſpondant de la ſeconde Figugure, les Périmétres, qui ne ſont que la Somme des Côtés de part & d'autre, conſerveront entre eux la même Raiſon. Si, par exemple, chaque Côté de la premiere Figure eſt à chaque Côté correſpondant de la ſeconde, comme 3 eſt à 1,

il est évident que le Périmétre de la premiere est triple du Périmétre de la seconde.

Liv. II. III. Sect. II. Part. Chap. I. Fig. 1.

2.

Les Lignes tirées semblablement, c'est-à-dire, avec les mêmes conditions dans les Figures semblables, sont entre elles comme les Périmétres & comme les Côtés homologues des deux Figures.

Pour rendre plus sensible la vérité de cette Proposition déja manifeste par elle-même, rappellons-nous que les Figures semblables ne le sont pas seulement dans leur contour extérieur, mais aussi dans les différens traits qu'on y peut tracer, sans quoi elles ne seroient pas parfaitement ressemblantes. L'Arpenteur qui fait le Plan d'un jardin ne se contente pas d'en tracer exactement le circuit : il manqueroit son coup s'il n'exprimoit pas avec la même exactitude la position du Parterre, des Allées & des Bosquets avec leur Longueur & leur Largeur. Pour y parvenir, il suit exactement sa premiere échelle; s'il s'avisoit d'en changer, il représenteroit mal le jardin; & les connoisseurs sçauroient bien relever son ignorance. Or, en suivant toujours la même échelle, l'Arpenteur trace évidemment dans son Plan des Lignes proportionnelles aux Lignes environnantes. Donc les Lignes semblablement tirées dans les Figures semblables sont proportionnelles aux Côtés & aux Périmétres.

Fig. 1. Il suit de la 1°. que *les Lignes de Hauteur perpendiculaire des Figures semblables, sont entre elles comme les Périmétres & les Côtés homologues*, puisqu'elles sont semblablement tirées.

2°. Que *les Produisans homologues des Figures semblables sont aussi entre eux, comme les Périmétres & les Côtés.* Car si les Figures sont des Rectangles, les Produisans sont de part & d'autre deux Côtés faisant Angle : si ces Figures ne sont pas rectangles, les Produisans sont des Lignes semblablement tirées. Fig. 2.

3°. Que *si des Figures semblables sont coupées en deux ou dans un plus grand nombre de parties par des Lignes semblablement tirées, chaque Figure partielle sera semblable à la partie correspondante dans l'autre Figure, & les Périmétres de ces parties seront entr'eux comme les Périmétres des totales.* Car tant les parties que le tout sont formés avec les mêmes Proportions, les mêmes conditions, & sur la même échelle. Ce seroit vouloir obscurcir la lumiere même, que de s'arrêter plus long-tems sur ces généralités. Fig. 1.

CHAPITRE II.

Similitude des Polygônes réguliers, & spécialement du Cercle.

POur peu que l'on fasse attention à la nature des Polygônes réguliers, on s'apperçoit aisément que *tous ceux d'une même espéce sont parfaitement semblables.*

En effet, tous les Polygônes réguliers de même espéce, ont 1°. le même nombre d'Angles & de Côtés. 2°. Tous leurs Angles sont égaux. Car les Angles d'un Triangle équilatéral sont

Liv. II. III. Sect. II. Part. Chap. II.

essentiellement de 60 Degrés : ceux d'un Quarré, de 90 : ceux d'un Pentagône régulier, de 108 : ceux de l'Exagône, de 120, &c. parceque le volume des Figures n'ajoute rien aux Angles, & ne diminue rien de leur grandeur.

Il ne s'agit donc plus que de la Proportion des Côtés, troisiéme condition de la similitude. Or cette Proportion est évidente dans les Polygônes réguliers d'une même espéce. Soient, par exemple, deux Quarrés inégaux : soit tel Rapport que l'on voudra entre la Racine du grand & celle du petit : il est manifeste que les autres Côtés auront le même Rapport, puisque ceux du grand & du petit sont respectivement égaux à leur Racine. Le même raisonnement s'applique tout seul aux autres Polygônes réguliers.

Fig. 2.

D'où il suit, que *les Lignes semblablement tirées dans une même espéce de Polygônes réguliers, sont proportionnelles aux Côtés homologues & aux Perimétres.* Donc *les Perimétres & les Côtés sont comme les Hauteurs perpendiculaires, comme les Diagonales, comme les Raïons droits & obliques, &c.*

Ces vérités sont si palpables, qu'elles n'ont pas besoin de preuves. Nous les avons supposées avec raison lorsque nous avons examiné la nature des Polygônes réguliers. Une seule Figure exactement tracée nous a représenté toutes celles de la même espéce. Le Commençant le moins initié dans la Géométrie ne pourroit s'empêcher de rire, si lorsqu'il a prouvé que l'Angle du Triangle équilatéral est de 60 Degrès, on alloit lui objecter que cela peut être vrai pour le Trian-

gle qu'il a ſous les yeux, & non pas pour ceux qui ſeroient plus grands ou plus petits. Car ſa preuve tombe ſur le Triangle équilatéral pris dans ſa généralité, abſtraction faite de toute grandeur particuliere.

Ayant une Ligne AB quelconque, j'en puis conſtruire tel Polygône régulier que l'on voudra : il ne s'agit que de déterminer l'Angle que cette Ligne doit former avec une Ligne égale qu'on y joindra. Mais cet Angle une fois fixé, je ſerai tellement contraint dans mon opération, qu'il n'en peut réſulter un autre Polygône régulier, que celui qu'on m'a preſcrit. Si l'on fixe l'Angle de 60 Degrés, la Ligne AB ne peut former qu'un Triangle équilatéral ; un Quarré, ſi l'Angle eſt de 90 Degrés, &c. Par conſéquent, ſi l'on me donne une ſeconde Ligne CD pour faire un ſecond Polygône régulier de la même eſpéce, il en réſultera néceſſairement une Figure, non pas égale, mais parfaitement ſemblable à la premiere ; parceque toutes les deux ſont également déterminées par une ſeule condition, c'eſt-à-dire, par le même Angle. Donc il ne peut y avoir d'autre différence entre le Périmétre de ces Figures, que celle qui ſe trouve entre les deux Lignes primordiales. Donc la Raiſon de ces deux Lignes continue dans les autres Côtés & dans les Lignes ſemblablement tirées. Donc tout y doit être proportionnel. Fig. 3. & 4.

Les Cercles étant des Polygônes réguliers d'une infinité de Côtés, ſont auſſi des Figures ſemblables. Car quoique les Côtés de tout Cercle ſoient infiniment petits, il ne faut

Liv. II. III. Sect. II. Part. Chap. II.

pas croire qu'ils soient de la même grandeur dans les Cercles différens. Le Côté infiniment petit d'une Circonférence double d'une autre, est double du Côté infiniment petit de cette derniere. Ainsi, quelque soit la Raison des Côtés infiniment petits dans deux Circonférences différentes, elle est toujours la même, puisque dans chaque Circonférence tous les Côtés infiniment petits sont égaux.

Fig. 5. Il est vrai qu'il n'est pas possible de fixer dans les Circonférences de deux Cercles, deux Côtés primordiaux, qui répétés un certain nombre de fois sous un Angle infiniment obtus, forment la Circonférence entiere. Mais au défaut de cette Ligne, on a le Raïon, dont la grandeur détermine tellement celle de la Circonférence, qu'elle n'est pas susceptible de plus ou de moins.

Donc *les Circonférences des Cercles sont entre elles, comme les Raïons, comme les Diamétres, comme les Cordes d'égal nombre de Dégrés.*

Donc *les Circonférences sont comme les demi-Circonférences, comme les tiers, comme les quarts, enfin comme les Arcs d'égal nombre de Degrés.*

Donc encore, *les Raïons sont comme les Diamétres, & comme les Cordes semblablement tirées.*

Donc enfin, *les Raïons, les Diamétres & les Cordes semblables sont comme les Circonférences, comme les mêmes parties aliquotes de Circonférences, & comme les Arcs d'égal nombre de Degrés.*



CHAPITRE III.

Les Triangles semblables.

LOrsqu'un Polygône n'est pas régulier, il faut plus d'une condition pour en déterminer la forme; & d'autant plus, que l'irrégularité est plus grande. Par conséquent, deux Polygônes irréguliers ne sont pas semblables par cela seul qu'ils sont de la même espéce. Il faut d'autres conditions que nous allons rechercher en commençant par le Triangle le plus simple, mais le plus important de tous les Polygônes.

1. Principes fondamentaux.

NOus avons dit plus d'une fois qu'il faut toujours regarder les Triangles comme tracés entre deux Paralleles, c'est-à-dire, qu'il faut toujours supposer qu'une Parallele à la Base passe par le Sommet. Il est donc naturel d'examiner d'abord le Rapport qui se trouveroit entre des Lignes semblablement tirées dans différens espaces paralleles.

Fig. 6.

Soient AB perpendiculaire & CD oblique entre deux Paralleles; & dans un autre espace parallele EF Perpendiculaire, & GH également inclinée que CD dans le sien. Il paroît manifeste que *la Perpendiculaire est à la Perpendiculaire, comme l'Oblique est à l'Oblique*, ou, ce qui est la même chose, que *la Perpendiculaire AB est à son Oblique CD, comme la Perpendiculaire EF est à son Oblique GH.* Car les

deux Perpendiculaires ont la même Direction également éloignée de la Direction parallele ; & les deux Obliques participent l'une comme l'autre à ces deux Directions, & s'éloignent également de la Perpendiculaire. Donc la Raison de AB à CD est la même que la Raison de EF à GH.

Comme ce raisonnement pourroit paroître un peu vague, confirmons-le par une preuve plus sensible. Soit AB partagée en un nombre quelconque d'Aliquotes, en six, par exemple, & chaque Aliquote nommée *X* : si par ces divisions l'on fait passer de nouvelles Paralleles qui coupent l'Oblique CD, cette Oblique se trouvera aussi partagée en six Aliquotes, que j'appelle *Y*.

Soit la mesure qui partage AB portée sur la Perpendiculaire EF. Supposons qu'elle y soit contenue exactement un certain nombre de fois, comme quatre, par exemple. Si par les divisions de EF on fait passer de nouvelles Paralleles qui coupent l'Oblique GH, cette Oblique se trouvera partagée en quatre Aliquotes égales à quatre *Y*.

Ainsi, AB se trouve transformée en 6 *X* : CD, en 6 *Y* : EF, en 4 *X* : GH, en 4 *Y*. Or, il est évident que 6 *X* . 4 *X* : : 6 *Y* . 4 *Y*. ou bien que, 6 *X* . 6 *Y* : : 4 *X* : 4 *Y*.

Mais si nous supposons que *X* Aliquote de AB ne soit pas exactement contenue dans EF, & que par conséquent l'Aliquote *Y* ne soit pas contenue exactement dans l'Oblique GH, cela reviendra toujours au même. Car *X* étant con-

tenue dans EF un certain nombre de fois avec une fraction quelconque, *Y* sera contenue le même nombre de fois dans GH avec la même fraction, & l'on pourra toujours dire $6X \cdot 3X + \frac{1}{4} :: 6Y \cdot 3Y + \frac{1}{4}$.

Ce seroit absolument la même chose si les Perpendiculaires AB, CD étoient des également inclinées. Car on pourroit diviser l'Oblique AB aussi-bien que la Perpendiculaire en Aliquotes *X*, & continuer le même raisonnement. Fig. 7.

Nous pouvons donc regarder comme une vérité fondamentale, que : *Lorsque deux Lignes comprises dans un espace parallele sont autant inclinées que deux autres comprises dans un autre espace parallele, les deux premieres sont proportionnelles aux deux secondes.*

Les Tranches paralleles qui coupent les Lignes comprises dans les espaces paralleles, nous donnent encore d'autres Proportions qu'il est utile de remarquer. Tous les *X*, aussi-bien que les *Y*, étant inclinés dans leur petit espace parallele comme la grande Ligne AB & la grande Ligne CD dans le leur, il est évident que $X \cdot AB :: Y \cdot CD$; ou ce qui revient au même, que $X \cdot Y :: AB \cdot CD$. Fig. 6.

On peut donc établir pour une seconde vérité fondamentale, que : *Si deux Lignes comprises entre deux Paralleles, sont coupées par une troisiéme Parallele, elles sont coupées proportionnellement*; c'est-à-dire, que les parties de ces Lignes sont entre elles en même Raison, que les Lignes dont elles sont des parties. Car au moyen de l'égalité d'inclinaison des Lignes Fig. 8.

correſpondantes, AE·CF::EB·FD::AB·CD &c.

LIV. II. III. SECT. II. PART. CHAP. III.

2. Application de la premiere vérité fondamentale.

Fig. 9.

APpliquons maintenant aux Triangles ces deux vérités fondamentales, en commençant par la premiere.

Suppoſons que le Triangle ABC ait un Côté CA incliné ſur la Baſe AB, comme le Côté *ca* du Triangle *abc* ſur la Baſe *ab*, & le Côté CB, comme le Côté *cb*: voyons ce qui réſulte de cette ſuppoſition.

1°. Ces quatre Lignes ſont proportionnelles. Car ſuppoſant des Paralleles aux Baſes tirées par le Sommet C & *c* des deux Triangles, on a la Ligne CA inclinée dans ſon eſpace parallele, comme la Ligne *ca* dans le ſien, & la Ligne CB comme la Ligne *cb*.

2°. Ces deux Triangles ſont reſpectivement équiangles l'un à l'autre. Car l'Angle eſt formé par l'inclinaiſon des Lignes. Si donc la Ligne CA a ſur ſa Baſe la même inclinaiſon que la Ligne *ca* ſur la ſienne, l'Angle en A eſt égal à l'Angle en *a*: par la même raiſon l'Angle en B eſt égal à l'Angle en *b*, & par conſéquent l'Angle en C à l'Angle en *c*, puiſqu'ils ſont ſupplémens des Angles de la Baſe.

3°. Les deux Baſes AB, *ab* ſont proportionnelles aux Côtés. Car en retournant les Triangles, & prenant pour Sommets les Angles A & *a* ou B & *b*, on a le Côté BC incliné ſur ſa Baſe comme le Côté *bc* ſur la ſienne, & de même le BA comme le Côté *ba*, puiſque les Angles C & *c* ſont égaux auſſi-bien que les Angles A & *a*.

Ces deux Triangles ſont donc parfaitement *ſemblables*, puiſqu'ils ont toutes les conditions requiſes pour la parfaite *ſimilitude*.

On voit par-là que l'égalité reſpective des Angles de deux Triangles, emporte la Proportion des Côtés homologues ; & que la Proportion de ceux-ci emporte l'égalité des Angles reſpectifs. Car les Angles ne peuvent être égaux, que par l'égalité d'inclinaiſon dans les Côtés qui les forment ; & les Côtés ne peuvent avoir une égalité reſpective d'inclinaiſon, que les Angles reſpectifs ne ſoient égaux.

D'où il ſuit 1°. que pour connoître la ſimilitude de deux Triangles, il ſuffit de ſçavoir que deux Angles du premier ſont reſpectivement égaux à deux Angles du ſecond : car les deux troiſiémes le ſeront néceſſairement auſſi.

2°. Que deux Triangles ſeront parfaitement ſemblables, ſi deux Côtés de l'un ſont proportionnels à deux Côtés de l'autre, & les Angles compris égaux. Car ces deux conditions déterminent tellement la Longueur des Baſes, que chacune n'a pas deux façons d'être tracée. Par conſéquent, les Côtés du premier ſont inclinés ſur leur Baſe, comme les deux Côtés du ſecond. Donc ils y forment des Angles reſpectivement égaux. Donc les deux Triangles ſont équiangles l'un à l'autre, & parfaitement ſemblables.

Ce ſeroit la même choſe ſi l'on avoit deux Côtés d'un Triangle proportionnels à deux Côtés d'un autre Triangle, & les deux Angles de la Baſe reſpectivement égaux. Car les Angles du Sommet le ſeroient néceſſairement auſſi. Par

conséquent, les deux Triangles seroient équiangles & semblables.

Liv. II. III. Sect. II. Part. Chap. III.

Mais si l'on avoit seulement deux Côtés d'un Triangle proportionnels à deux Côtés d'un autre Triangle, & un des Angles de la Base du premier égal à un Angle de la Base du second, il ne seroit pas sûr que les deux Triangles
Fig. 10. fussent semblables. Ayant le Côté CA du grand Triangle déterminé, ainsi que l'Angle en A : ayant de même la Longueur du second Côté déterminée, ce second Côté peut être posé de telle maniere, qu'il en résultera le Triangle ACB, ou le Triangle ACE beaucoup moindre. De même, ayant le Côté *ca* du petit Triangle, l'Angle en *a* égal à l'Angle A du grand, & la Longueur du second Côté déterminée de façon, que le second Côté du grand Triangle soit au second Côté du petit, comme le Côté CA du grand est au Côté *ca* du petit, la position du second Côté du petit Triangle est susceptible de deux déterminations; de sorte qu'il en résulteroit ou le Triangle *acb* ou le Triangle beaucoup moindre *ace*. Il est manifeste que le Triangle ACB est semblable au Triangle *acb*, & ACE à *ace*; mais ACB n'est pas semblable à *ace*, ni ACE à *acb*. Il faut donc, outre les conditions spécifiées, déterminer la position des deux seconds Côtés, & dire s'ils formeront sur leurs Bases un Angle aigu ou bien un obtus.

9. Application de la seconde vérité fondamentale.

Appliquons encore aux Triangles la seconde vérité fondamentale.

Fig. 11. Soient les Côtés d'un Triangle ACB coupés

par une Parallele à la Base telle que EF. Cette Parallele, qui devient Base d'un petit Triangle ECF, donne deux Triangles, un grand & un petit, équiangles l'un à l'autre, & par conséquent semblables.

Car l'Angle en C est commun aux deux Triangles; & les Angles de la Base du petit sont égaux respectivement à ceux de la Base du grand, puisqu'ils sont extérieurs à l'espace compris entre les Paralleles AB, EF. Les Côtés homologues sont donc proportionnels. Par conséquent, CA premier Côté du grand Triangle, est à CE premier Côté du petit, comme CB second Côté du grand est à CF second Côté du petit; & encore comme AB Base du grand est à EF Base du petit.

Mais il y a plus : la Base EF parallele à AB coupe les Côtés CA, CB en parties proportionnelles. Car en supposant une troisiéme Parallele tirée par le Sommet C, l'on a deux paires de Lignes comprises dans deux espaces paralleles, & dont l'inclinaison est respectivement égale. En effet, les Lignes CA, CB conservant la même inclinaison dans toute leur longueur, la partie CE est inclinée dans son espace parallele, comme la partie EA dans le sien; & la partie CF comme la partie FB. Donc CE·EA::CF·FB· & encore ::CA·CB.

D'un autre côté, si l'on coupe les Bases paralleles EF, AB par une Ligne quelconque CD tirée du Sommet C sur la Base inférieure, les Bases seront aussi coupées en parties proportionnelles, en sorte que EH sera à AD, comme HF Fig. 12.

eſt à DB. Car il eſt clair que le Triangle CAD eſt ſemblable au Triangle CEH ; & auſſi que le Triangle CDB eſt ſemblable au Triangle CHF : ce qui nous donne les deux Proportions ſuivantes.

CD· CH :: AD· EH.
CD· CH :: DB· HF.
Donc AD· EH :: DB· HF.

Car les deux Raiſons de la derniere Proportion ſont égales à la Raiſon de CD à CH, c'eſt-à-dire, que la partie AD de la grande Baſe eſt à EH partie correſpondante de la petite Baſe, comme DB autre partie de la grande Baſe eſt à HF autre partie de la petite Baſe.

D'où il ſuit, que ſi les deux Baſes étoient coupées par pluſieurs Lignes quelconques tirées du Sommet C ſur la Baſe inférieure, les parties de la petite Baſe ſeroient proportionnelles aux parties de la grande.

4. Similitude des Polygônes irréguliers de plus de trois côtés.

NOus ne nous étendrons pas ſur la ſimilitude des Polygônes irréguliers de plus de trois Côtés. Il ſuffira de dire qu'elle ne peut être déterminée que par l'application exacte de toutes les conditions requiſes pour la ſimilitude, leſquelles ne ſe ſuppléent point dans ces Figures, comme elles ſe ſuppléent dans les Triangles. Dans ceux-ci, par exemple, l'égalité reſpective des Angles emporte la Proportion des Côtés homologues : ce qui ne peut s'appliquer aux Polygônes plus compoſés.

Fig. 13. Prenons pour exemple deux Rectangles, qui d'abord paroiſſent des Figures aſſez ſemblables. Leurs

Leurs Angles ſont parfaitement égaux, puiſqu'ils ſont droits. Mais il n'eſt pas ſûr que leurs Côtés homologues ſoient proportionnels. Car ſi, par exemple, la Baſe du premier eſt 8 : celle du ſecond, 6 : la Hauteur du premier, 5 : la Hauteur du ſecond, 3 ; il n'y a point de Proportion ; puiſque 8 n'eſt pas à 6, comme 5 eſt à 3. Par conſéquent, ces deux Rectangles ne ſont pas ſemblables.

Ainſi, pour établir la *ſimilitude* parfaite de deux Polygônes irréguliers de plus de trois Côtés, il faut 1°. qu'ils ſoient de la même eſpéce. 2°. Que les Angles correſpondans ſoient égaux chacun à chacun. 3°. Que tous les Côtés homologues, ſans exception, ſoient proportionnels. C'eſt par le manque de cette troiſiéme condition, que deux Rectangles ne ſont pas toujours ſemblables.



SECTION III.

TROISIE'ME PARTIE.

Les Figures planes semblables considérées selon l'espace qu'elles renferment.

CHAPITRE PREMIER.

Principes sur le Rapport des espaces contenus dans les Figures semblables & non semblables.

L'Espace que renferment les Figures est absolument homogène, comme on l'a remarqué plus d'une fois. La *forme* que les Figures ne doivent qu'à leur Périmétre, ne détermine point leur grandeur. Elles peuvent être inégales, quoique de la même espéce : elles peuvent être égales, quoique d'espéce différente.

L'espace est censé formé par les Produisans, c'est-à-dire, par le produit de deux Lignes que l'on peut déterminer dans chaque Figure plane. Or, ces Lignes dans une Figure, ont avec les Produisans d'une autre Figure, un Rapport quelconque qu'il est à propos de considérer d'abord.

1. Rapport général de grandeur entre deux Figures planes quelconques.

LOrsque l'on compare deux Figures planes quelconques, il est évident que l'espace de la premiere est à l'espace de la seconde, comme

le produit des Produisans de la premiere est au produit des Produisans de la seconde. Car l'espace contenu dans chaque Figure n'est autre chose que le produit de ses Produisans.

On exprime cette vérité d'une autre maniere en disant, que *deux Figures sont entre elles en Raison composée de leurs Produisans homologues.*

Pour entendre ce langage, il faut considérer que l'on ne peut concevoir le Rapport de grandeur entre deux Figures, qu'en comparant leurs Produisans homologues, puisque leur grandeur consiste dans le produit de ces Produisans. Supposons que les Produisans d'un Triangle soient 4 & 3, & ceux d'un Parallélogramme, 5 & 2, il faut comparer la Base 4 du Triangle avec la Base 5 du Parallélogramme : ce qui donne la Raison de 4 à 5; & de plus 3 moitié de la Hauteur du Triangle, avec 2 Hauteur du Parallélogramme : ce qui donne une seconde Raison de 3 à 2. Pour composer ces deux Raisons en une seule, il faut, comme on l'a dit, multiplier 4 & 3 Antécédens, & 5 & 2 Conséquens des Raisons simples; ce qui donne la Raison de 12 à 10. Or 4 & 3 sont les Produisans du Triangle; 5 & 2, les Produisans du Parallélogramme. Donc ces Figures sont entre elles en Raison composée de leurs Produisans homologues, c'est-à-dire, comme 12 à 10.

Fig. 144

V. 1. Part. de cette 3. Sect. Ch. 5.

Ce Principe est simple; mais il en résulte des conséquences lumineuses & très-utiles.

Il suit donc 1°. que *si deux Figures quelconques ont deux Produisans égaux & deux inégaux, elles sont entre elles comme les inégaux.* Car une

Raiſon ne change point lorſqu'on en multiplie les Termes par la même grandeur. Ayant la Raiſon de 4 à 3, ſi je multiplie l'un & l'autre par 2, la Raiſon réſultante de cette Multiplication 8 à 6 ſera la même que celle de 4 à 3. Suppoſant donc que les Produiſans égaux dans les deux Figures ſoient 2 & 2, & les inégaux 4 & 3, l'eſpace de l'une ſera 4x2; & l'eſpace de l'autre, 3x2. Donc les deux Figures ſeront entre elles comme les Produiſans inégaux 4 & 3.

Les régles les plus ſimples de la Planimétrie nous conduiront à la même concluſion. Suppoſons que les deux Figures à comparer ſoient des Rectangles, ou, ce qui revient au même, qu'elles ſoient transformées dans les Rectangles auſquels elles ſont égales. Suppoſons encore que les deux Rectangles ayant les mêmes Baſes, ont des Hauteurs différentes, ou qu'ayant même Hauteur, ils différent par la Baſe: je dis que ces Rectangles ſont comme leurs Hauteurs ou comme leurs Baſes inégales.

Fig. 15. Car l'eſpace compris dans ces Rectangles n'eſt autre choſe que leur Baſe répétée autant de fois qu'il y a de Points dans leur Hauteur; ou leur Hauteur, autant qu'il y a de Points dans leur Baſe. Ainſi, la Baſe ou la Hauteur étant égales, la différence de grandeur entre les deux Rectangles ne peut venir que de leur Produiſant inégal. Donc ces Figures ſont entre elles comme leurs Produiſans inégaux.

Donc un Rectangle ou toute autre Figure que ce ſoit eſt double, triple, quadruple d'un autre Rectangle ou d'une autre Figure quelcon-

que, lorſqu'avec une même Baſe, il a une Hauteur double, triple, quadruple; ou lorſqu'avec la même Hauteur il a une Baſe double, triple, quadruple, &c.

Il ſuit en ſecond lieu, que *deux Figures ſont égales, lorſque les Produiſans de l'une ſont réciproques aux Produiſans de l'autre*, c'eſt-à-dire, lorſque les Produiſans de l'une ſont les Extrêmes ou les Moyens d'une Proportion, dont les Produiſans de l'autre ſont les Extrêmes ou les Moyens.

Pour plus grande facilité, réduiſons nos Figures à leurs Rectangles. Suppoſons, par exemple, que la Baſe du premier eſt 8, & ſa Hauteur 3; que la Baſe du ſecond ſoit 6, & ſa Hauteur 4. Il eſt clair que la comparaiſon directe des Produiſans homologues ne donne pas de Proportion; car 8 n'eſt pas à 6, comme 3 eſt à 4. Mais nous aurons une Proportion en renverſant l'ordre de la ſeconde Raiſon, c'eſt-à-dire, ſi après avoir comparé la Baſe du premier à la Baſe du ſecond, on compare, non la Hauteur du premier à la Hauteur du ſecond, comme l'ordre naturel le demande; mais la Hauteur du ſecond à la Hauteur du premier. Car il eſt certain dans notre exemple, que 8 Baſe du premier Rectangle, eſt à 6 Baſe du ſecond, comme 4 Hauteur du ſecond eſt à 3 Hauteur du premier. Fig. 16.

On voit dans cette Proportion, que les Produiſans de la premiere Figure ſont les Extrêmes, & que les Produiſans de la ſeconde ſont les Moyens. Or, le produit des Extrêmes eſt égal au Produit des Moyens. Donc les deux Figures ſont égales.

LIV. II. III. SECT. III. PART. CHAP. I. 2.

Rapport de grandeur entre les Figures planes semblables.

VEnons maintenant aux Figures ſemblables. Elles ont, ainſi que nous l'avons prouvé ci-deſſus, leurs Côtés homologues proportionnels; & les Lignes ſemblablement tirées proportionnelles aux Côtés. Par conſéquent, leurs Produiſans, qui ſont auſſi des Lignes ſemblablement tirées, forment entre eux une Proportion directe.

Fig. 17.

Pour plus grande commodité, réduiſons ces Figures à leurs Rectangles, qui ne peuvent manquer en ce cas d'être ſemblables. Nous aurons donc la Baſe du premier à la Baſe du ſecond, comme la Hauteur du premier à la Hauteur du ſecond : par exemple 6 Baſe du premier Rectangle, à 4 Baſe du ſecond; comme 3 Hauteur du premier, à 2 Hauteur du ſecond. 6 · 4 :: 3 · 2.

Il réſulte de cette Proportion, que les deux Figures ſont, non-ſeulement en Raiſon composée de leurs Produiſans homologues (ce qui leur eſt commun avec toutes les autres Figures imaginables), mais de plus en Raiſon doublée de ces Produiſans. Car la Raiſon doublée eſt une Raiſon composée de deux Raiſons égales.

Mais nous avons prouvé que pour doubler deux Raiſons égales, il étoit indifférent de multiplier les Antécédens d'une part & les Conſéquens de l'autre; ou de multiplier l'Antécédent d'une des Raiſons ſimples par lui-même, & le Conſéquent de la même Raiſon auſſi par lui-même. Ainſi, nos deux Figures ſemblables qui ſont entre elles comme 6x3 eſt à 4x2, ſont auſſi

comme 6×6 est à 4×4, ou bien, comme 3×3 est à 2×2. Or 6×6 & 4×4 sont les Quarrés des Bases: 3×3 & 2×2 sont les Quarrés des Hauteurs. Donc *les Figures semblables sont entre elles comme les Quarrés de leurs Produisans homologues.*

Arrêtons-nous un peu sur cette vérité, l'une des plus importantes de la Géométrie, & tâchons de nous la rendre sensible par d'autres preuves.

Nous avons déja vu que l'art de faire des Figures semblables, étoit une affaire de Toisé, suivant une Echelle que l'on s'est formée. Ayant, par exemple, un Rectangle dont la Base est de 6 Toises & la Hauteur de 3: si je veus faire un petit Rectangle semblable, je prends une petite Ligne d'un Pouce, si l'on veut, pour représenter la Toise. Ainsi, mon petit Rectangle semblable doit avoir 6 Pouces de Base & 3 de Hauteur. Car 6 Toises est à 6 Pouces, comme 3 Toises est à 3 Pouces. Fig. 18.

Maintenant si par les divisions en Toises des Côtés de mon grand Rectangle, je fais passer des Paralleles à la Base & au Côté, tout l'espace se trouvera partagé en 18 Toises quarrées. Et de même, si par les divisions en Pouces des Côtés de mon petit Rectangle, je fais passer des Paralleles à la Base & au Côté, l'espace sera partagé en 18 Pouces quarrés.

Ainsi, le grand Rectangle est au petit, comme 18 Toises quarrées sont à 18 Pouces quarrés. Or 18 Toises quarrées sont à 18 Pouces quarrés, comme une Toise quarrée est à un Pouce quarré. Donc le grand Rectangle est au petit, comme le Quarré du tiers de sa Hauteur ou du

LIV. II. III. SECT. III. PART. CHAP. I.

ſixiéme de ſa Baſe, eſt au Quarré du tiers de la Hauteur ou du ſixiéme de la Baſe du petit Rectangle. Mais le Quarré du tiers de la Hauteur ou du ſixiéme de la Baſe du grand Rectangle, eſt au Quarré de toute ſa Hauteur ou de toute ſa Baſe, comme le Quarré du tiers de la Hauteur ou du ſixiéme de la Baſe du petit Rectangle eſt au Quarré de toute ſa Hauteur ou de toute ſa Baſe. Donc le grand Rectangle eſt au petit Rectangle, comme le Quarré de la Hauteur ou de la Baſe du grand, eſt au Quarré de la Hauteur ou de la Baſe du petit. Donc *les Figures ſemblables ſont entre elles, comme les Quarrés de leurs Produiſans homologues.*

Or les Produiſans ſont proportionnels aux Côtés & aux Lignes ſemblablement tirées dans les Figures ſemblables. Donc *ces Figures ſont entre elles comme les Quarrés de leurs Côtés homologues, & généralement comme les Quarrés de leurs Lignes ſemblablement tirées.*

Donc *les Polygônes ſemblables ſont entre eux comme les Quarrés de leurs Raïons droits ou de leurs Raïons obliques.* Donc *les Cercles ſont entre eux comme les Quarrés de leurs Raïons, de leurs Diamétres, de leurs Cordes d'égal nombre de Degrés, &c.*

Mais les Côtés des Figures ſemblables ne ſont pas ſimplement des Racines de Quarrés. On y peut conſtruire des Triangles équilatéraux, & toutes ſortes de Polygônes réguliers. On peut les prendre pour Raïons ou Diamétres de Cercles. Toutes ces Figures étant ſemblables chacune dans leur eſpéce, ſont par conſéquent entre

elles comme les Quarrés des Côtés homologues ſur leſquels on les a conſtruites. Donc les Figures ſemblables, qui ſont entre elles, comme les Quarrés de leurs Côtés homologues, ſont auſſi comme tous les autres Polygônes ſemblables que l'on pourroit conſtruire ſur ces mêmes Côtés.

En conſidérant les Figures ſemblables ſous un autre aſpect, la Proportion de leurs Produiſans homologues nous découvre une autre propriété remarquable : C'eſt que *de deux Figures ſemblables on peut faire aiſément deux Figures égales.* Il ne s'agit, au lieu de faire une Raiſon doublée, que de prendre le produit des Produiſans *étérologues* (que l'on me paſſe cette expreſſion) c'eſt-à-dire, de multiplier le premier Produiſant de la premiere Figure, par le ſecond Produiſant de la ſeconde, & le ſecond Produiſant de la premiere, par le premier Produiſant de la ſeconde.

Dans les deux Rectangles de la Fig. 17, la comparaiſon de leurs Produiſans homologues nous a donné la Proportion 6·4::3·2.

Le Produit des Extrêmes 6 par 2 eſt égal au Produit des Moyens 4 par 3. Or 6 eſt la Baſe du premier Rectangle : 2, la Hauteur du ſecond : 4, la Baſe du ſecond : 3, la Hauteur du premier. Par conſéquent, les deux Rectangles que l'on formeroit par le produit des Produiſans *étérologues*, ſeroient des Rectangles égaux.



LIV. II. III. SECT. III. PART. CHAP. II.

CHAPITRE II.

Propriétés du Triangle rectangle.

LA Proportion des Figures semblables avec les Quarrés de leurs Côtés homologues, a fait découvrir dans le Triangle rectangle des propriétés très-importantes.

I.

1. Premiere Propriété. Fig. 19.

SI du Sommet C d'un Triangle rectangle quelconque, on abaisse une Perpendiculaire CD sur l'Hypothénuse AB, le Triangle sera partagé en deux Triangles rectangles semblables entre eux, & semblables au Triangle total.

Car 1°. les deux petits Triangles ont un Angle droit en D, comme le grand en C. 2°. L'Angle en A est commun au grand & au petit Triangle. 3°. L'Angle en B est commun au grand Triangle & au moyen. Donc le troisiéme Angle des deux Triangles partiaux est égal au troisiéme Angle du Triangle total. Donc les trois sont équiangles & semblables. Donc leurs Côtés homologues, c'est-à-dire, ceux qui sont opposés aux Angles égaux, sont proportionnels.

Il faut observer avec soin que dans la Figure la même Ligne est en même tems Côté de deux Triangles différens. La Ligne AC petit Côté du grand Triangle, est Hypothénuse dans le petit. CB grand Côté du grand Triangle, est Hypo-

thénuse dans le moyen. AD petite partie de la grande Hypothénuse, est le petit Côté du petit Triangle : DB grande partie de la grande Hypothénuse, est le grand Côté du moyen Triangle. Enfin, la Perpendiculaire CD grand Côté du petit Triangle, est le petit Côté du moyen.

Pour ne pas se confondre dans les comparaisons des Côtés homologues des trois Triangles, je vais les ranger par ordre.

1°. Les Hypothénuses sont AB pour le Grand; CB pour le Moyen; & CA pour le Petit.

2°. Les grands Côtés sont CB pour le Grand: DB pour le Moyen; & CD pour le Petit.

3°. Les petits Côtés sont CA pour le Grand: CD pour le Moyen; & AD pour le Petit.

II.

LA Perpendiculaire CD étant abaissée du Sommet sur l'Hypothénuse, nous avons trois Moyennes proportionnelles; sçavoir, les trois Lignes CA, CD, CB partant du Sommet. 2. Seconde Propriété.

1°. *La Perpendiculaire CD est Moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'Hypothénuse AB coupée au Point D.*

Car les Triangles ACD, DCB étant semblables, la Proportion de leurs Côtés homologues nous donne : AD petit Côté du petit Triangle est à CD petit Côté du Moyen, comme la même CD grand Côté du petit Triangle, est à DB grand Côté du Moyen. ∺ AD·CD·DB. Or AD & DB sont les deux parties de la grande Hypothénuse. Donc CD est Moyenne proportionnelle entre ces deux parties.

Liv. II. III. Sect. III. Part. Chap. II.

2°. *CA petit Côté du grand Triangle, est Moyenne proportionnelle entre l'Hypothénuse AB toute entiere, & sa petite partie AD.*

Car le grand Triangle ACB & le petit ACD étant semblables, la Proportion de leurs Côtés homologues nous donne : AB Hypothénuse du grand Triangle est à CA Hypothénuse du Petit, comme la même CA petit Côté du grand Triangle est à AD petit Côté du Petit. ∺ AB·CA· AD.

3°. *CB est Moyenne proportionnelle entre l'Hypothénuse AB toute entiere, & sa grande partie DB.*

Car le grand Triangle ACB & le Moyen DCB étant semblables, la Proportion de leurs Côtés homologues nous donne : AB Hypothénuse du grand Triangle, est à CB Hypothénuse du Moyen, comme la même CB grand Côté du grand Triangle, est à DB grand Côté du Moyen. ∺ AB·CB·DB.

3. Conséquence de ces Propriétés par rapport au Quarré de l'Hypothénuse.

CEs deux propriétés du Triangle rectangle nous démontrent une vérité dont la découverte a causé des transports de joie aux anciens Géométres. La voici. *Le Quarré de l'Hypothénuse du Triangle rectangle est égal aux Quarrés des deux Côtés pris ensemble.*

Fig. 19.

On entend bien que le Quarré de l'Hypothénuse, est celui dont l'Hypothénuse seroit la Racine ; & que les Quarrés des Côtés sont ceux qui auroient pour Racine les Côtés du Triangle. On dit donc que ces deux Quarrés construits sur les Côtés sont égaux, pris ensemble, au Quarré construit sur l'Hypothénuse.

Premiere Preuve tirée de la premiere propriété du Triangle rectangle.

Les Figures ſemblables ſont entre elles comme les Quarrés de leurs Côtés homologues. Donc le grand Triangle eſt au Petit, comme le Quarré de AB Hypothénuſe du grand Triangle eſt au Quarré de CA Hypothénuſe du Petit. Donc encore, le grand Triangle eſt au Moyen, comme le Quarré de AB Hypothénuſe du grand Triangle, eſt au Quarré de CB Hypothénuſe du Moyen.

D'un autre côté, les Quarrés des Côtés homologues des Figures ſemblables ſont entre eux comme les Figures elles-mêmes. Or le Triangle total eſt égal au Moyen & au Petit pris enſemble. Donc le Quarré de l'Hypothénuſe du Triangle total eſt égal aux Quarrés des Hypothénuſes des deux Triangles partiaux; & par conſéquent, aux Quarrés des deux Côtés CA; CB du Triangle total.

Seconde Preuve tirée de la ſeconde propriété du Triangle rectangle.

Soient conſtruits les Quarrés dont il s'agit ſur les trois Côtés du Triangle : ſoit auſſi la Perpendiculaire CD prolongée juſques ſur la Baſe inférieure du Quarré de l'Hypothénuſe. La Perpendiculaire DE partagera le grand Quarré en deux Rectangles quelconques. Par conſéquent, ſi chacun de ces Rectangles étoit égal au Quarré du Côté qui lui correſpond, le Quarré de l'Hypothénuſe, compoſé des deux Rectangles, ſeroit égal aux deux autres Quarrés pris enſemble. Fig. 20.

LIV. II. III. SECT. III. PART. CHAP. II.

Or 1°. le Rectangle ADEF est égal au Quarré de CA. Car la Ligne CA est Moyenne proportionnelle entre l'Hypothénuse entiere AB & sa petite partie AD. (∺ AB · CA · AD) Donc le Rectangle formé par le Produit de l'Hypothénuse entiere & de sa petite partie AD est égal au Quarré du Côté CA. Or, le Rectangle ADEF a pour Produisans la Ligne AF égale à l'Hypothénuse AB, & AD petite partie de l'Hypothénuse. Donc, &c.

2°. Le même raisonnement conclut pour l'égalité du second Rectangle DEGB au Quarré du Côté CB. Car cette Ligne CB est Moyenne proportionnelle entre l'Hypothénuse entiere AB & sa grande partie DB. Donc le Rectangle de AB ou BG son égale par DB, est égal au Quarré de CB. Donc le Quarré de l'Hypothénuse est égal aux deux autres Quarrés pris ensemble.

4. Triangle rectangle isocelle. CEtte vérité est féconde en conséquences utiles & curieuses. Nous allons tâcher de les développer.

Fig. 21. La premiere qui se présente, c'est, que si le Triangle rectangle est isocelle, c'est-à-dire, si les Côtés CA, CB sont égaux, le Quarré de l'Hypothénuse est double du Quarré d'un des Côtés. Car les deux Quarrés des Côtés étant égaux, puisqu'ils ont une Racine égale, le Quarré de l'Hypothénuse, égal aux deux, est double de l'un des deux.

Fig. 21. Ainsi, rien n'est plus facile que de faire un Quarré double d'un autre. Car ayant un Quarré

quelconque ACBD, si l'on tire la Diagonale AB, cette Ligne sera l'Hypothénuse du Triangle rectangle isocelle ACB. Par conséquent, le Quarré dont elle seroit Racine, seroit double du Quarré de CA ou de CB. Or, le Quarré de CA ou de CB est le Quarré même dont on cherche le double. Donc, &c.

Ceci mérite d'être remarqué. Car il vient naturellement dans l'esprit que pour avoir un Quarré double d'un autre, il faut prendre une Racine double de la premiere. Ce seroit une méprise considérable : car une Racine double donneroit un Quarré quadruple. Si la Racine d'un Quarré simple est d'un Pied, par exemple, le Quarré résultant est un Pied quarré. Mais le Quarré d'une Racine de deux Pieds contient 4 Pieds quarrés : car 2×2=4. Fig. 22.

De même, pour faire un Quarré triple, il ne faudroit pas prendre le triple de la Racine : car le Quarré de la Racine triple seroit nonécuple du simple, puisque 3×3=9. Mais il faut faire un Angle droit de la Racine du Quarré simple & de sa diagonale : l'Hypothénuse qui fermera le Triangle, sera la Racine du Quarré triple. Car le petit Côté du Triangle donneroit un Quarré simple : le grand côté, diagonale du Quarré simple donneroit un Quarré double. Ainsi, les Quarrés des côtés seroient égaux à trois simples. Donc le Quarré de l'Hypothénuse, égal au double plus au simple, seroit triple du simple. Fig. 21.

Pour faire un Quarré quadruple, il n'y a qu'à prendre deux diagonales du Quarré simple, & en faire les deux côtés d'un Triangle rectangle

isocelle : l'Hypothénuse sera la Racine du Quarré quadruple. Car ce Quarré seroit égal aux deux Quarrés des Côtés pris ensemble. Or, chacun des Quarrés des Côtés est double du simple. Donc le Quarré de l'Hypothénuse en est quadruple. Donc encore cette Hypothénuse est double de la Racine simple : car nous avons vu ci-dessus qu'une Racine double de la simple donneroit aussi un Quarré quadruple.

Liv. II. III. Sect. III. Part. Chap. II.

Fig. 22.

Il est inutile d'aller plus loin, & d'expliquer en détail la maniere de faire un Quarré quintuple, Sextuple, &c. Le Lecteur la trouvera aisément de lui-même.

5. Application aux autres Polygônes réguliers construits sur les côtés du Triangle rectangle.

MAis il est très-important d'approfondir les Rapports qui se trouvent entre les Polygônes réguliers que l'on peut construire sur les trois Côtés du Triangle rectangle. Rien n'empêche en effet que l'on ne prenne chaque Côté de ce Triangle pour être le Côté d'un Triangle équilatéral, ou de quelque autre Polygône régulier; & même pour le Diamétre ou le Raïon d'un Cercle.

Fig. 23. & 24.

Or, quelque soit l'espéce de Polygône régulier que l'on construise sur les Côtés du Triangle rectangle, il est indubitable que le Polygône construit sur l'Hypothénuse est égal en Surface aux deux autres pris ensemble. Car ces Polygônes étant semblables, sont entre eux comme les Quarrés de leurs Côtés homologues; & par conséquent, comme les Quarrés dont les Côtés du Triangle rectangle sont Racines. Or, le Quarré de l'Hypothénuse est égal aux deux autres

tres Quarrés pris enſemble. Donc le Polygône régulier conſtruit ſur l'Hypothénuſe eſt égal aux deux autres Polygônes ſemblables conſtruits ſur les Côtés.

Cela poſé : Si l'on a, par exemple, deux Triangles équilatéraux de différente grandeur, il ſeroit aiſé d'en faire un ſeul Triangle équilatéral. Car formant un Triangle rectangle avec un Côté de chacun des deux Triangles équilatéraux, l'Hypothénuſe que l'on tirera ſera le Côté du Triangle que l'on cherche. Fig. 23.

De même, ſi l'on a deux Cercles inégaux, il eſt aiſé de décrire un nouveau Cercle égal aux deux autres pris enſemble. Car faiſant un Angle droit avec les Raïons des deux premiers, l'Hypothénuſe ſeroit le Raïon du troiſiéme Cercle. Fig. 24.

Suppoſons à préſent que le Triangle rectangle, ſur les Côtés duquel on conſtruit des Polygônes ſemblables, ſoit iſocelle : il eſt évident que le Polygône de l'Hypothénuſe ſera double de l'un des Polygônes des Côtés. Car les deux Polygônes des Côtés, qui, pris enſemble, ſont égaux au Polygône de l'Hypothénuſe, ſont par la ſuppoſition égaux entre eux. Par conſéquent, chacun d'eux eſt moitié du Polygône de l'Hypothénuſe. Fig. 23.

Ainſi, un demi-Cercle conſtruit ſur l'Hypothénuſe d'un Triangle rectangle iſocelle eſt double d'un des demi-Cercles conſtruits ſur les Côtés. En général, il faut raiſonner ſur les Figures ſemblables que l'on peut bâtir ſur les Côtés d'un Triangle rectangle, comme on a raiſonné ſur les Quarrés ; puiſque ces Figures ſemblables ſont Fig. 24.

entre elles comme les Quarrés de leurs Côtés homologues.

Par conséquent, pour avoir un Polygône régulier double d'un autre de la même espéce, il faut bien se donner de garde de prendre pour le Côté du nouveau Polygône, le double du Côté du Polygône simple. Car ce Côté double donneroit un Polygône régulier quadruple. Et de même pour avoir un Polygône régulier triple d'un autre, il ne faut pas prendre le triple du Côté du premier, pour en faire le Côté du nouveau Polygône que l'on veut construire. Ce Côté triple donneroit un Polygône régulier nonécuple.

Mais pour avoir un Polygône régulier double d'un autre de même espéce, prenez deux Lignes toutes deux égales au Côté du Polygône simple; ou, si c'est un Cercle, toutes deux égales au Raïon. De ces deux Lignes formez un Angle droit : l'Hypothénuse que vous tirerez ensuite, sera le Côté du Polygône régulier double, ou le Raïon du Cercle double que vous cherchez.

De même, pour avoir un Polygône triple, cherchez d'abord le Côté du Polygône double : faites ensuite un Angle droit avec le Côté du simple & du double : l'Hypothénuse que vous tirerez, sera le Côté du Polygône triple.

Pour avoir un Polygône quadruple, prenez le Côté du Polygône double. Avec deux Lignes égales à ce Côté, faites un Angle droit : l'Hypothénuse que vous tirerez, sera le Côté du Polygône quadruple. Mais comme cette Hypothénuse est double du Côté du Polygône simple, on peut quadrupler ce dernier d'une façon plus

abrégée, en prenant le double de son Côté pour être le Côté du Polygône quadruple que l'on veut construire.

Liv. II. III. Sect. III. Part. Chap. II.

6. Rapport entre les Côtés du Triangle rectangle.

APrès avoir examiné les Rapports que les Quarrés & les autres Polygônes réguliers bâtis sur les Côtés du Triangle rectangle, peuvent avoir avec le Quarré de l'Hypothénuse ou avec tout autre Polygône régulier auquel elle serviroit de Base, l'ordre demande que nous discutions quels sont les Rapports des Racines de ces Quarrés ou Polygônes, c'est-à-dire, des Côtés du Triangle rectangle avec la Racine du grand Quarré ou grand Polygône, c'est-à-dire, avec l'Hypothénuse.

Deux choses ici sont également certaines. La premiere, que l'Hypothénuse a plus de longueur qu'aucun des autres Côtés du Triangle rectangle, puisque l'Hypothénuse est opposée au plus grand Angle du Triangle, sçavoir, à l'Angle droit. La seconde, que l'Hypothénuse est plus petite que les deux Côtés du Triangle pris ensemble. Car l'Hypothénuse AB est une Ligne droite, & les deux Côtés AC, CB ne vont de A en B que par par un détour. Mais quel est le Rapport précis de ces deux Lignes ou de l'une des deux avec l'Hypothénuse? Voilà l'état de la question.

Si nous supposons que le Triangle rectangle ne soit pas isocelle, il peut arriver que l'on connoisse au juste le Rapport de ces Côtés avec l'Hypothénuse. Que le petit Côté, par exemple, soit de 3 Pieds, le Grand de 4, l'Hypothénuse

ſera de 5. Car ſon Quarré doit être égal au Quarré de 3 qui eſt 9; plus au Quarré de 4 qui eſt 16. Or $9+16=25$, dont la Racine eſt 5. Par conſéquent l'Hypothénuſe doit être de 5 Pieds. Mais, comme on le voit, cela ne peut arriver que lorſque la Somme de deux nombres quarrés eſt elle-même un nombre quarré : ce qui n'arrive jamais que dans l'exemple propoſé, & dans les multiples des nombres 3, 4, 5. Excepté ces cas, il eſt impoſſible d'exprimer en nombre le Rapport des Côtés du Triangle rectangle avec l'Hypothénuſe. Suppoſé, par exemple, que le petit Côté ſoit 2 : le grand 3. le Quarré du premier eſt 4, & celui du ſecond, 9. $4+9=13$. Donc le Quarré de l'Hypothénuſe eſt 13. Mais 13 n'eſt point un nombre quarré : la Racine quarrée de 13 ne peut s'exprimer ni par un nombre entier, ni par un nombre fractionnaire. Donc on ne peut ordinairement exprimer par un nombre le Rapport du Côté du Triangle rectangle à ſon Hypothénuſe. Donc il ne peut ordinairement y avoir qu'une Raiſon ſourde entre ces deux Lignes.

Remarquons qu'un Triangle rectangle qui n'eſt pas iſocelle, eſt toujours la moitié d'un Parallélogramme rectangle coupé par ſa Diagonale, laquelle devient Hypothénuſe. Par conſéquent, on doit dire que les Produiſans d'un Parallélogramme rectangle ne ſont point comme nombre à nombre avec la diagonale, excepté dans les cas aſſez rares ſpécifiés ci-deſſus.

Mais nous ne trouverons aucune exception, ſi nous ſuppoſons que le Triangle rectangle ſoit

isocelle. Remarquons qu'un Triangle rectangle isocelle est toujours moitié d'un Quarré coupé par sa diagonale; & qu'ainsi c'est la même chose de dire que l'Hypothénuse n'a qu'un Rapport sourd avec le Côté du Triangle rectangle isocelle, ou de dire que la Diagonale n'a que cette espéce de Rapport avec le Côté du Quarré.

Il est aisé de prouver cette Proposition d'une maniere démonstrative.

1°. Dans la supposition du Triangle rectangle isocelle, les Quarrés des Côtés sont égaux; & leur valeur peut s'exprimer par un nombre quarré, parceque rien n'empêche que leur Racine ne soit partagée en Aliquotes égales. Donc le Quarré de l'Hypothénuse sera égal à la Somme de ces deux nombres quarrés. Mais la Somme de deux nombres quarrés égaux ne peut jamais être un nombre quarré. Donc, il est impossible d'exprimer en nombre l'Hypothénuse Racine du Quarré double.

Soit le Côté du Triangle de 2 Pieds. Le Quarré de 2 Pieds contient 4 Pieds quarrés. Donc le Quarré de l'Hypothénuse contiendra 8 Pieds quarrés. Mais 8 n'est pas un nombre quarré. Par conséquent, en exprimant la Racine du Quarré latéral par 2, il est impossible de trouver aucun nombre qui puisse exprimer l'Hypothénuse.

2°. Dans le Triangle rectangle isocelle, le Quarré de l'Hypothénuse est double du Quarré latéral. Par conséquent, le Rapport du dernier au premier est de 1 à 2. La Racine de 1 quarré est 1 en longueur, parceque $1 \times 1 = 1$ quarré. Mais il n'y a aucun nombre qui puisse être Ra-

cine quarrée de 2, c'eſt-à-dire, qui multiplié par lui-même faſſe 2. Donc il ne peut y avoir de Rapport exact, ou de nombre à nombre entre la Racine du Quarré ſimple & celle du Quarré double.

3°. La Raiſon du Quarré ſimple au Quarré double eſt doublée de la Raiſon de leurs Racines. Car nous avons prouvé ci-deſſus que les Termes d'une Raiſon doublée ſont entre eux, comme le Quarré de l'Antécédent d'une Raiſon ſimple eſt au Quarré du Conſéquent de la même Raiſon.

Nous avons auſſi prouvé que toute Raiſon doublée ne peut manquer d'avoir pour Expoſant un nombre quarré, lorſque la Raiſon ſimple eſt de nombre à nombre, ou peut être exprimée par des nombres.

Mais la Raiſon du Quarré ſimple au Quarré double, quoiqu'exprimée par un nombre, n'a pas un nombre quarré pour Expoſant. Car la Raiſon du Quarré ſimple au double eſt 1 à 2, dont l'Expoſant $\frac{1}{2}$ n'eſt pas un nombre quarré. De même, la Raiſon du Quarré double au Quarré ſimple eſt 2 à 1, dont l'Expoſant 2 n'eſt pas un nombre quarré. Donc la Raiſon ſimple des Racines ne peut s'exprimer par des nombres. Donc le Côté du Triangle rectangle iſocelle & ſon Hypothénuſe, ou ce qui eſt la même choſe, le Côté du Quarré & ſa diagonale, ſont des Lignes incommenſurables.

7. Incommenſurables.

IL eſt néceſſaire de développer cette derniere concluſion, qui pourroit d'abord paroître différente de la premiere.

Deux Grandeurs sont incommensurables, lorsqu'elles n'ont aucune Aliquote commune qui puisse les mesurer exactement. Or, tel est le Côté du Triangle rectangle isocelle comparé avec l'Hypothénuse: ou ce qui est la même chose, le Côté du Quarré comparé avec la diagonale.

Supposons que le Côté du Quarré soit partagé en un nombre quelconque d'Aliquotes, en un million, par exemple, je dis qu'une de ces millioniémes parties ne peut mesurer exactement la diagonale, & qu'on ne peut pas dire qu'elle y soit contenue un certain nombre de fois sans reste. Car si cette petite mesure, contenue exactement un million de fois dans le Côté du Quarré, étoit contenue exactement un Million Quatre Cent Mille fois dans sa Diagonale, le Côté seroit à la Diagonale, comme un Million est à un Million Quatre Cent Mille: ce ce qui est une Raison exacte, de nombre à nombre, dont l'Exposant seroit un nombre. Une pareille Raison étant doublée, c'est-à-dire, l'Antécédent multiplié par lui-même, & le Conséquent aussi par lui-même, on auroit la Raison du Quarré d'un Million au Quarré d'un Million Quatre Cent Mille; & par conséquent, l'Exposant de cette Raison doublée seroit un nombre quarré. Mais cela répugne absolument, puisqu'il est démontré que la Raison du Quarré simple au Quarré double est de 1 à 2, & celle du double au simple de 2 à 1, dont les Exposans $\frac{1}{2}$ & 2 ne sont pas des nombres quarrés. Donc la Racine du Quarré simple est incommensurable à

la Racine du Quarré double, ou ce qui est la même chose, le Côté du Quarré à la Diagonale.

On prouvera de même que la Racine du Quarré simple est incommensurable à la Racine du Quarré triple. Car ces Quarrés étant ensemble comme 1 à 3 ou comme 3 à 1, leur Raison a pour Exposant $\frac{1}{3}$ ou 3, qui ne sont point des nombres quarrés.

Mais la Raison du Quarré simple est commensurable à la Racine du Quarré quadruple. Car nous avons vû que la Racine du Quarré quadruple est double de la Racine du Quarré simple. Ces Racines sont donc entre elles comme 1 à 2, ou 2 à 1. Aussi la Raison des Quarrés a pour Exposant des nombres quarrés, sçavoir, $\frac{1}{4}$, si l'on compare le simple au quadruple; & 4, si l'on compare le quadruple au simple.

On prouveroit encore que la Racine du Quarré simple est incommensurable aux Racines du Quintuple, du Sextuple, du Septuple & de l'Octuple. Car les Quarrés étant comme 1 à 5, à 6, à 7, à 8, leur Raison a pour Exposant $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, ou en comparant les grands au petit, l'Exposant seroit 5, 6, 7, 8, qui ne sont pas des nombres quarrés.

Mais la Racine du Quarré simple est commensurable à la Racine du Quarré nonécuple. Car nous avons vû que cette derniere est triple de la premiere. Aussi la Raison des Quarrés 1 & 9 a pour Exposant un nombre quarré, sçavoir, $\frac{1}{9}$ ou 9.

Je ne pousserai pas plus loin ce détail. Ce que

ai dit suffit pour faire comprendre clairement, que les Racines des Quarrés ne sont commensurables, que lorsque les Quarrés eux-mêmes sont entre eux comme les nombres quarrés, c'est-à-dire, comme 1 est à 4, à 9, à 16, à 25, à 36, &c.

Mais il est très-essentiel d'observer que ce que nous avons dit de l'incommensurabilité de la plûpart des Racines quarrées, doit s'appliquer aux Côtés des Polygônes réguliers quelconques construits sur les Côtés du Triangle rectangle isocelle, ou avec des Lignes égales à ces Côtés; puisqu'il est prouvé que ces Lignes sont incommensurables. On doit donc dire que le Côté d'un Triangle équilatéral simple, ou d'un Pentagône, ou d'un Exagône, &c. est incommensurable au Côté d'un Triangle équilatéral double, &c. & par la même raison la Circonférence d'un Cercle, son Diamétre, son Raïon, &c. sont incommensurables à la Circonférence, au Diamétre, au Raïon d'un Cercle double, &c.

Cette remarque nous fait appercevoir dans la Géométrie une multitude prodigieuse de Lignes incommensurables les unes aux autres; & ce qui est plus étonnant encore, c'est de voir que les Figures entieres aient entre elles un Rapport très-exact & de nombre à nombre, pendant que leurs Côtés respectifs, leurs Produisans, leur Périmétre, leurs Lignes semblablement tirées, ne peuvent avoir qu'un Rapport sourd. C'est ce que les Géométres expriment en disant que ces Lignes qui n'ont entre elles aucune mesure commune, sont néanmoins *commensurables en puissance*.

Ne concluons pas cependant de-là que toutes les Figures planes ayent entre elles un Rapport exact, lorsque leurs Côtés sont incommensurables. On pourroit alléguer plusieurs exemples du contraire : un seul suffira. Il est facile de trouver une Ligne moyenne proportionnelle entre le Côté du Triangle rectangle isocelle & l'Hypothénuse, comme nous le verrons dans peu. Soit donc cette moyenne supposée : je l'appelle B : le Côté du Triangle A, & l'Hypothénuse C. Ces trois Lignes sont incommensurables, puisque A & C le sont. Mais quelque Rapport qu'elles ayent entre elles, elles forment une Proportion continue ∺ A·B·C.

Or, c'est une vérité constante dans la Science des Proportions, que dans une continue, le premier Terme est au troisiéme, comme le Quarré du premier est au Quarré du second. Ayant la Proportion continue ∺ 2·4·8, il est certain que 2 est à 8, comme le Quarré de 2 qui est 4, est au Quarré de 4 qui est 16. Nous avons donc ici·A·C : : AA·BB. Or, A Côté du Triangle, n'a qu'un Rapport sourd avec C Hypothénuse. Donc le Quarré de A n'a que le même Rapport avec le Quarré de B.

On prouveroit de même que le Quarré de l'Hypothénuse C est incommensurable au Quarré de la Moyenne proportionnelle B. Car l'on peut tourner la Proportion continue de cette maniere : ∺ C·B·A. Donc C·A : : CC·BB. Or, C & A sont incommensurables. Donc CC & BB le sont aussi ; & néanmoins le Quarré de C est commensurable au Quarré de A, puisque le premier est double du second.

Cette doctrine des *incommensurables* est regardée avec raison comme l'un des plus profonds mystères de la Géométrie. Elle tient intimement à la divisibilité de l'Etendue à l'infini. En effet, si cette divisibilité avoit des bornes, & qu'à force de partager, on pût parvenir à des unités parfaites, ces unités seroient parfaitement égales; & par conséquent chaque Ligne, chaque Surface seroit composée d'un nombre quelconque d'unités, & ne pourroient différer que par le plus ou le moins de ces unités que chacune d'elles contiendroit. Donc elles seroient ensemble en Raison de nombre à nombre. Donc elles ne seroient pas incommensurables, puisqu'elles auroient des Aliquotes communes qui les mesureroient exactement. Ainsi, l'incontestable incommensurabilité d'un grand nombre de Lignes & de Surfaces doit bannir à jamais de la Géométrie les Points indivisibles, les Lignes sans Largeur, les Surfaces sans Profondeur. Cette vérité est le triomphe de nos Elémens infiniment petits, & divisibles eux-mêmes à l'infini.

En effet, en supposant le Côté du Quarré partagé dans ses Elémens infiniment petits, si l'on partage la Diagonale par les mêmes infiniment petits, il doit se trouver pour achever la derniere de ces Lignes, un reste d'Elément qui n'ait aucune commensurabilité avec l'Elément entier qui le précéde. Car si ce reste de Point avoit quelque Commensurabilité avec le Point entier qui le précéde, on pourroit dire que le Côté du Quarré est à la Diagonale, comme le nombre des Points contenus dans le Côté, est

au nombre des Points, plus telle fraction de Point, contenus dans la Diagonale, ce qui seroit une Raison de nombre à nombre. Donc le reste de Point qui termine une des Lignes est incommensurable au Point entier.

Mais si nous supposons que l'on divise à part chacune des deux Lignes par des Points aliquotes, ce qui paroîtroit plus naturel, il faudroit reconnoître que les Aliquotes du Côté & celles de la Diagonale sont, non-seulement d'inégale grandeur, mais encore qu'elles n'ont entre elles aucune Commensurabilité. Car deux Touts composés d'Aliquotes commensurables, le seroient nécessairement eux-mêmes. Voilà donc des infiniment petits d'inégale grandeur, & qui de plus n'ont entre eux aucune mesure commune. Donc les infiniment petits du second ordre, Elémens des infiniment petits du premier ordre, sont aussi quelquefois incommensurables entre eux. Donc ceux du troisiéme ordre. Donc ceux du quatriéme, & ainsi à l'infini. Voilà le prodige : voilà la profondeur. Qui seroit assez hardi pour entreprendre de la sonder ? Contentons-nous d'avoir mis le pied sur le bord de l'abyme.

8. Lunulles d'Hyppocrates de Chio.

IL n'est pas permis de traiter des Polygônes réguliers construits sur les trois Côtés du Triangle rectangle, sans dire un mot des Lunulles d'Hyppocrates de Chio. Voici ce que c'est. Nous avons prouvé que si l'on construit un demi-Cercle sur les trois Côtés du Triangle rectangle, celui de l'Hypothénuse est égal aux deux autres.

pris ensemble ; & qu'il est double de chacun d'eux, si le Triangle rectangle est isocelle. LIV. II. III. SECT. III. PART. CHAP. II.

Au lieu de décrire le demi-Cercle de l'Hypothénuse en en-bas, comme cela paroît plus naturel, on s'est avisé, peut-être par hazard, de le décrire en en-haut. La Circonférence passe nécessairement par le Sommet du Triangle, puisque l'Angle du Sommet est droit, & que l'Hypothénuse est Diamétre de ce demi-Cercle. Fig. 24. & 25.

Cette position du demi-Cercle de l'Hypothénuse a fait remarquer à un ancien Géométre une singularité peu utile en elle-même, mais néanmoins assez curieuse. Car le grand demi-Cercle empiéte dans l'intérieur des deux petits, & doit avoir en commun avec chacun d'eux une portion d'espace. Ce sont les deux Segmens marqués en noir dans la Figure.

Le grand demi-Cercle est égal aux deux petits pris ensemble. Donc si de part & d'autre on ôte les Segmens noirs communs au grand & aux petits demi-Cercles, le reste du grand sera égal au reste des petits. Or, ce qui reste du grand après le retranchement des Segmens noirs, c'est la Surface même du Triangle rectangle : & ce qui reste des petits, ce sont deux petites Lunes en Croissant terminées en dehors par la Circonférence des petits demi-Cercles ; & en-dedans, par les parties de la Circonférence du grand demi-Cercle. Donc les deux Lunules prises ensemble ont une Surface égale à celle du Triangle rectangle : & comme nous supposons le Triangle isocelle, & par conséquent les deux Lunules égales, chacune d'elles est égale à la moitié du Triangle rectangle.

Il est facile, comme l'on sçait, d'avoir exactement la Surface du Triangle & de sa moitié. On aura donc par ce moyen la Quadrature de chaque Lunule, sans qu'on puisse pour cela parvenir à la rectification des deux Courbes qui la terminent. Qui se seroit attendu à cette conclusion, qui cependant est très-certaine? On ne peut trouver exactement la Quadrature du Cercle, ni de ses Secteurs, ni de ses Segmens; & l'on trouve la Quadrature d'une portion de Cercle terminée par des Arcs de Cercles différens.

9. Parfaite Quadrature des Figures planes. Fig. 19.

IL ne nous reste plus, pour achever ce qui concerne les propriétés du Triangle rectangle, qu'à expliquer le grand usage de la Perpendiculaire CD abaissée du Sommet du Triangle rectangle sur l'Hypothénuse. Nous avons montré que cette Perpendiculaire étoit Moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'Hypothénuse coupée au Point D.

Voyez le Traité de la Planimétrie.

Cette découverte nous donne la Quadrature parfaite des Figures planes: ce qui peut souvent être très-utile. Rappellons-nous la méthode que nous avons donnée pour réduire au Rectangle quelque Figure plane que ce soit. Il ne s'agit que d'avoir les deux Produisans de cette Figure; parcequ'en joignant ces deux Produisans par leurs extrémités, en sorte qu'ils fassent un Angle droit, nous avons la Base & le Côté du Rectangle égale à la Figure donnée.

Cette réduction est très-suffisante pour mesurer exactement l'espace renfermé dans toute

Figure plane. Mais on pourroit désirer de la réduire au Quarré parfait, au lieu du simple Rectangle. Le Quarré est d'une extrême commodité, comme nous l'avons observé plus d'une fois, parceque sa Racine fait connoître la Figure entiere : au lieu que pour connoître un Rectangle, il faut avoir également égard à sa Base & à sa Hauteur. Aussi pour avoir le Rapport des Figures semblables, on se sert des Quarrés construits sur les Côtés & sur les Lignes semblablement tirées, par préférence aux autres Polygônes réguliers que l'on pourroit employer, comme on l'a vû ci-dessus.

Or, pour trouver le Quarré égal à quelque Figure plane que ce soit, il ne s'agiroit que d'avoir une Moyenne proportionnelle entre ses deux Produisans. Car, selon la propriété essentielle de la Proportion continue, le produit du Moyen proportionnel multiplié par lui-même, qui ne peut être qu'un Quarré, est égal au produit des deux Extrêmes. Or, la Perpendiculaire CD abaissée du Sommet du Triangle rectangle, donne cette Ligne moyenne que nous cherchons.

Supposons donc que je veuille avoir un Quarré égal à un Rectangle quelconque, (je prends le Rectangle, parceque toutes les autres Figures s'y réduisent) il est évident que la Ligne moyenne entre la Base & la Hauteur, seroit Racine du Quarré que l'on cherche. Fig. 26.

Pour trouver cette Ligne, je ferai une seule Ligne droite des deux Produisans de mon Parallélogramme, & cette grande Ligne sera l'Hy- Fig. 27.

Liv. II. III. Sect. III. Part. Chap. II.

pothénuſe du Triangle rectangle que je dois conſtruire. Il faudra que la Perpendiculaire que j'éleverai ſur le Point D, jonction des deux Produiſans, ſe termine au Sommet C du Triangle. Mais comme je ne ſçais pas encore quelle ſera la longueur de cette Ligne, je ſuis dans l'embarras où placer ce Point qui doit être le Sommet de l'Angle droit. J'en ſors cependant, en me rappellant que tous les Triangles rectangles que l'on peut former à l'infini ſur l'Hypothénuſe AB, ont néceſſairement leur Sommet dans la Circonférence du demi-Cercle, dont l'Hypothénuſe ſeroit le Diamétre.

Ainſi, du milieu de cette Hypothénuſe pris pour Centre, je décris un demi-Cercle. Enſuite élevant une Perpendiculaire ſur le Point D, je la termine à la Circonférence, dans laquelle le Point rencontré ſera le Point C que je cherche. Car ſi de ce Point, je tire deux Lignes droites aux extrémités de la Ligne totale AB, l'Angle compris entre ces deux Lignes ſera droit, puiſqu'il s'appuye ſur un Diamétre. J'ai donc par ce moyen la Perpendiculaire CD moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'Hypothénuſe, c'eſt-à-dire, entre les deux Produiſans du Rectangle. Donc le Quarré de cette Ligne eſt égal au Rectangle donné.

On voit par-là que cette propriété du Triangle rectangle devient propriété du Cercle, par le rapport intime qui ſe trouve entre le demi-Cercle & le Triangle rectangle : & cette obſervation facilite extrêmement la parfaite Quadrature des Figures planes. En effet, il ne s'agit que de

de trouver la Moyenne proportionnelle entre les deux Produisans d'une Figure. Des deux Produisans, faites une seule Ligne droite. Du milieu de la Ligne totale prise pour Diamétre, décrivez une demi-Circonférence de Cercle. Sur le Point où les deux Lignes produisantes se joignent, élevez une Perpendiculaire terminée à la Circonférence : vous avez la Moyenne proportionnelle, sans vous embarrasser du Triangle rectangle dont les deux Côtés CA, CB ne peuvent vous être d'aucune utilité dans cette occasion.

Nous avons vû dans le Traité des Proportions, qu'il étoit rare qu'on pût trouver en nombre le Moyen proportionnel entre deux nombres donnés, parcequ'il faudroit pour cela que le Rectangle formé par les deux nombres extrêmes de la Proportion continue fût un nombre quarré, dont la Racine seroit le Moyen proportionnel. Mais nous avons ajouté que ce qui se trouvoit rarement en nombre, se trouve toujours en Ligne. Ce que nous venons d'établir en est la preuve.



GÉOMÉTRIE MÉTAPHYSIQUE.

LIVRE TROISIÉME.

LES SOLIDES.

DANS le premier Livre de cet Ouvrage, nous avons considéré la Ligne, expression de la Longueur. Nous en avons distingué les espéces par les divers mouvemens du Point élémentaire. Nous avons examiné les combinaisons respectives de ces Lignes; les manieres dont elles peuvent se rencontrer, se toucher, se couper; les Angles qu'elles forment par leur union; la nature & la mesure de ces Angles.

Les Lignes connues nous ont donné le moyen de construire les Figures planes par la réunion des deux premieres Dimensions de l'Etendue. Nous avons considéré les Surfaces par leur contour, par leurs Angles, par leurs Côtés. Nous avons mesuré l'espace qu'elles renferment; & nous avons apperçu les rapports qu'elles ont entre elles.

Il s'agit maintenant de nous élever à la connoissance des Solides, c'est-à-dire, de l'Etendue

complette qui comprend les trois Dimensions. Ce n'est que par abstraction que nous les avons séparées les unes des autres. Réunissons-les, comme elles sont nécessairement unies dans quelque portion d'étendue que ce soit.

LIV. III.

Pour nous guider, reprenons la considération de cette premiere Figure dont la simplicité nous a paru propre à fixer nos idées sur la nature & la composition de l'Etendue. Dans le Cube ABCD, le Point A premier Elément, par son mouvement dans la même Direction, forme la Ligne AB. Cette Ligne est donc un composé de Points de la même nature que A.

Fig. 1.

La Ligne AB mue parallelement à elle-même, & traçant par son Point A une Ligne AC égale à AB, & perpendiculaire sur elle, forme une Surface quarrée, que l'on peut concevoir comme un amas d'autant de Lignes AB qu'il y a de Points dans AC, ou ce qui est la même chose, d'autant de Lignes AC qu'il y a de Points dans AB. Car dans le mouvement de la Ligne AB sur AC ou de AC sur AB, chacun des Points dont elles sont composées, trace une Ligne de même nature. Ou bien, pour réunir les deux idées ensemble, nous concevrons le Quarré ABC comme couvert de Quarrés A infiniment petits, se touchant sans aucun intervalle, également propres à composer les Lignes AB & AC, & dont le nombre est égal au nombre des Points de la Ligne AB multiplié par lui-même, ou ce qui revient au même, par le nombre des Points de la Ligne AC.

Prenant ensuite la Surface ABC troisiéme

Elément, & la faisant mouvoir parallelement à elle-même le long d'une Ligne AD égale à la Ligne AB ou AC, & perpendiculaire sur l'une & sur l'autre, le Cube est formé, & composé d'autant de tranches quarrées ABC qu'il y a de Points dans AD, ou bien, d'autant de Lignes AD qu'il y a de Points dans le Quarré ABC; ou bien enfin, de Cubes A infiniment petits, unis sans intervalle, & dont le nombre est égal au nombre de Points contenus dans le Quarré ABC multiplié par le nombre des Points de la Ligne AD, c'est-à-dire, égal au nombre des Points de la Ligne AB élevé à la *troisiéme puissance*.

Il faut observer ici que le mouvement du Quarré ABC forme cinq nouvelles Surfaces quarrées, lesquelles avec la premiere environnent le Cube & le bornent de toutes parts. Car dans le mouvement du Quarré ABC, les Lignes AB, AC & leurs deux opposées paralleles forment chacune un Quarré; & la Surface ABC parvenue au Point D, termine le Cube par en-haut, comme elle le termine par en-bas. Il est clair que ce total de Surfaces environnantes peut être consideré indépendamment de la solidité du Cube. C'est comme une espéce de boëte cubique infiniment mince, que l'on supposeroit absolument vuide, ou dont on mesureroit l'étendue, sans s'embarrasser de ce dont elle est remplie.

Quoique les autres Solides n'ayent ni la simplicité ni l'uniformité du Cube, il est cependant manifeste que ce que nous venons de dire sur

cette Figure, convient à toutes les autres dans une certaine généralité. Toutes sont composées de Tranches infiniment minces, égales ou inégales, posées les unes sur les autres sans intervalle. Toutes peuvent être considérées comme un faisceau de Lignes égales ou inégales en longueur, appuyées perpendiculairement ou obliquement sur une Surface quelconque qui leur sert de Base. Toutes peuvent être conçues comme un amas de Points cubiques ou non-cubiques, égaux ou inégaux. Toutes enfin sont terminées par une multitude plus ou moins grande de Surfaces, perpendiculaires ou obliques sur celle qui leur sert de Base, & dont la réunion fait cette espéce de boëte dont la forme peut varier à l'infini, & dans laquelle est renfermée une portion d'étendue solide.

Tout cela nous montre entre les Solides & les Surfaces une analogie frappante, & des Rapports de ressemblance & de dissemblance, qu'il est très-utile de remarquer.

Tous les Solides sont renfermés par des Surfaces unies ou courbées, comme les Surfaces le sont par des Lignes droites ou courbes.

Les Lignes qui composent le Périmétre d'une Surface forment des Angles plans; & les Surfaces qui bornent un Solide, forment des Angles solides. Pour former les premiers, il ne faut que deux Lignes qui se rencontrent en un Point: pour les seconds, il faut au moins trois Angles plans dont les pointes se réunissent en un seul Sommet.

L'égalité des Côtés & des Angles constitue la

régularité d'un Polygône : l'égalité des Surfaces environnantes & des Angles du Solide le rendent régulier.

Les Côtés du Polygône sont perpendiculaires ou obliques sur leur Base, & les Lignes opposées sont paralleles ou non paralleles. Il en est de même du Solide : ses Surfaces environnantes sont quelquefois posées perpendiculairement sur celle qui leur sert de Base, & quelquefois obliquement ; & les Surfaces opposées sont quelquefois paralleles, & quelquefois ne le sont pas.

En comparant l'intérieur des Surfaces avec l'intérieur des Solides, nous y trouverons la même analogie.

La Hauteur d'un Plan se mesure par une Ligne perpendiculaire abaissée du Point le plus élevé, sur la Base, prolongée s'il en est besoin : & la Hauteur d'un Solide est aussi mesurée par une semblable Ligne.

On conçoit la Surface comme couverte par une multitude de Lignes paralleles à la Base, égales ou inégales à cette Base. On doit concevoir de même que le Solide est formé par un amas de Tranches posées les unes sur les autres ; soit que ces Tranches soient égales à celle qui sert de Base, soit qu'elles aillent en augmentant ou en diminuant.

On peut encore considérer l'espace contenu dans une Figure plane, comme un amas de Points quarrés infiniment petits, ou de Points d'une autre forme que l'on trouve moyen de réduire à des Points quarrés : on peut de même considérer l'espace solide comme un amas

de Points cubiques infiniment petits, ou de Points d'une autre forme que l'on trouvera moyen de réduire à des Points cubiques.

Ce parallele nous fait sentir que les principes qui nous ont conduits à la connoissance des Polygônes ou Figures planes, nous dirigeront également dans l'examen que nous allons faire des * Polyëdres ou Figures solides ; & qu'il ne s'agit que d'en faire l'application. Pour y procéder avec ordre, nous diviserons ce troisiéme Livre en quatre Sections.

Dans la premiere, qui sera comme une espéce d'introduction, on considérera l'élévation des Lignes sur les Plans, & des Plans sur d'autres Plans : la formation & la nature des Angles solides. Enfin, les différentes espéces de Polyëdres.

Dans la seconde Section, l'on examinera la Surface extérieure des Solides, & l'on parviendra à la mesurer exactement.

Dans la troisiéme, on mesurera l'espace compris dans les Figures solides.

Enfin, l'on verra dans la quatriéme Section, les rapports que ces Figures ont entre elles, & les propriétés des Figures semblables.

* Ce mot, tiré du Grec, signifie *Figure à plusieurs Faces ou Bases*, comme *Polygône* signifie *Figure à plusieurs Angles*. *Polygône* est un terme affecté aux Figures planes ; & *Polyëdre*, aux Figures solides.

LIV. III.
I. SECT.
CHAP. I.

PREMIERE SECTION.

Introduction à la connoissance des Solides.

CHAPITRE PREMIER.

Elévation des Lignes sur un Plan.

UNe Ligne est perpendiculaire sur une Ligne, lorsqu'elle ne panche pas plus d'un côté que de l'autre, & que de chaque côté elle forme un Angle droit : une Ligne au contraire est oblique, lorsqu'elle panche plus d'un côté que de l'autre, & qu'elle forme sur l'Horizontale deux Angles inégaux, dont l'un est obtus & l'autre aigu.

Les Lignes étant considérées sans Largeur, lorsqu'il ne s'agit que de leur position, on ne peut avoir égard qu'aux deux Côtés A & B de l'Horizontale, pour juger si la Ligne tombante est oblique ou perpendiculaire. Mais si l'Horizontale devenoit un Plan d'une Largeur assignable, il est évident qu'il ne suffiroit pas pour établir la Perpendicularité de la Ligne tombante, de lui voir former des Angles droits sur une Ligne tracée sur le Plan : il faudroit encore qu'elle ne panchât vers aucun côté de ce Plan. La moindre inclinaison d'un côté détermineroit l'Obliquité de la Ligne.

Par conséquent, *si du Point où la Ligne tombante rencontre le Plan, on décrit un Cercle à quelque ouverture de Compas que ce soit, chaque Point de la Ligne sera également éloigné de tous les Points de la Circonférence du Cercle, si la Ligne est perpendiculaire : ce sera le contraire, si elle est oblique.* Fig. 2. & 3.

De même, *si du Point où la Ligne tombante rencontre le Plan, l'on tire des Lignes droites de tous les Côtés, la tombante formera des Angles droits sur toutes ces Lignes, si elle est perpendiculaire ; mais si elle est oblique, elle formera des Angles inégaux, dont les deux opposés vaudront deux droits.* Fig. 4. Fig. 3.

Mais il faut remarquer que dans le cas de l'Obliquité de la Ligne sur le Plan, cette Ligne ne laissera pas d'être perpendiculaire sur une Ligne unique comme EF, laquelle passe par le Point de Contingence C. Car, en supposant que la Tombante panche directement sur le Raïon BC, & s'éloigne directement du Raïon CH dans le prolongement de BC, elle ne doit point être inclinée sur un Diamétre EF qui couperoit à Angles droits le Diamétre BH. Fig. 3.

Mais la Perpendicularité de la Tombante AC sur une seule Ligne EF tracée sur le Plan, n'emporte point sa Perpendicularité sur le Plan même ; parceque le Plan n'est pas plus déterminé par une seule Ligne, que la Ligne ne l'est par un seul Point. Cette raison demande quelque développement.

Tant que le Point A est en repos, on ne peut dire quelle Ligne il formera par son mouvement

LIV. III. I. SECT. CHAP. I.

futur, à moins qu'on ne détermine quelle en sera la Direction. Car le Point A peut être mû vers une infinité de côtés différens. Donc il faut deux Points pour déterminer une Ligne droite.

De même, lorsqu'une Ligne droite EF est en repos, on ne peut dire quel Plan elle tracera par son mouvement, à moins qu'on ne détermine quelle en sera la Direction; car elle peut être mûe aussi vers une infinité de côtés différens; & par conséquent elle peut être commune à une infinité de Plans possibles. Donc pour déterminer le Plan particulier que cette Ligne formera par son mouvement, il faut un troisiéme Point vers lequel sa marche soit dirigée.

Ainsi, deux Points ne suffisent pas pour déterminer un Plan : il en faut au moins trois; mais trois suffisent, pourvu qu'ils ne soient pas rangés en Ligne droite.

Fig. 5. Par conséquent, *une Ligne est perpendiculaire sur un Plan, lorsque tous ses Points sont également éloignés de deux Points G, H également distans du Point de Contingence C, pourvu que ces trois Points G, H, C ne soient pas rangés en Ligne droite*; ou, ce qui revient au même, *une Ligne est perpendiculaire sur un Plan, lorsqu'elle forme des Angles droits avec deux Lignes tirées du Point de Contingence C, selon deux Directions différentes. Mais elle ne peut être qu'oblique, lorsqu'elle ne forme des Angles droits que sur une seule des Lignes du Plan, qui passent par le Point de Contingence.*

Fig. 3.

La Perpendicularité n'a pas besoin de mesure, parcequ'elle n'est pas susceptible de plus &

de moins. Mais on en a besoin pour l'Obliquité, parceque l'Obliquité peut croître ou décroître à l'infini. Liv. III. II. Sect. Chap. I.

Lorsque l'on cherche l'inclinaison d'une Ligne sur un Plan, on entend toujours la plus grande qu'elle y puisse avoir. Par exemple, la Ligne AC perpendiculaire sur le seul Diamétre EF, est oblique sur tous les autres Raïons tirés du Point C à la demi-Circonférence ECBF. Mais il est évident que la Ligne AC qui forme des Angles aigus sur tous les autres Raïons de cette demi-Circonférence, sera d'autant plus oblique sur eux qu'ils seront plus éloignés du Diamétre EF. Par conséquent, la plus grande inclinaison de la Ligne AC sera sur le Raïon CB également éloigné de E & de F. Fig. 3.

Pour trouver tout d'un coup ce Raïon, du Point A de l'Oblique tombante, il faut abaisser une Perpendiculaire AB sur le Plan : la Ligne CB qui joindra les Points C & B de la Perpendiculaire & de l'Oblique, sera de toutes les Lignes, qui peuvent être tirées du Point C sur le Plan, celle sur qui l'Oblique AC aura la plus grande inclinaison. Cette Ligne CB est appellée *Projection de l'Oblique.* Fig. 6.

Ces principes établis, il est aisé d'appliquer aux Lignes élevées sur des Plans, tout ce qu'on a dit dans le premier Livre sur les Lignes élevées sur des Lignes.

I.

D'un Point pris sur un Plan on ne peut élever qu'une seule Ligne perpendiculaire; & l'on ne Fig. 4.

peut en abaisser qu'une d'un Point pris hors du Plan.

Fig. 7. *Si d'un Point hors du Plan, on abaisse plusieurs Lignes, la Perpendiculaire sera la plus courte: les également obliques seront égales; & la plus oblique sera la plus longue.*

On perdroit son tems à démontrer de nouveau des conséquences si claires. J'en dis autant de la plûpart des suivantes.

2.

Si deux Lignes ou un plus grand nombre sont perpendiculaires sur un Plan, elles sont paralleles entre elles.

Fig. 8. Car les deux Perpendiculaires sur un Plan le sont nécessairement sur la Ligne CD qui joint leurs Points de Contingence sur le Plan. Or deux Perpendiculaires sur une Ligne sont paralleles entre elles.

Par la même raison, *deux également inclinées sur un Plan & du même sens, sont aussi paralleles.*

3.

Si une Ligne qui traverse le Plan est perpendiculaire en-dessus, elle l'est aussi en-dessous.

Fig. 9. Et de même, *si elle est oblique, elle le sera en-dessous comme en-dessus*, avec cette différence néanmoins, que l'Obliquité change de côté, comme il arrive aux Lignes qui traversent obliquement une autre Ligne.

4.

Fig. 10. Si deux Plans sont paralleles, & que de l'un on tire deux Lignes sur l'autre; la premiere, perpendiculaire; & la seconde, oblique.

Celle qui est perpendiculaire sur un Plan l'est aussi sur le Plan parallele ; & celle qui est oblique sur l'un l'est également sur l'autre en sens différent ; & les Angles alternes sont égaux, &c. LIV. III. I. SECT. CHAP. I.

Les Perpendiculaires tirées entre Plans paralleles sont égales, ainsi que les également inclinées.

D'où il suit, que *deux Plans sont paralleles, lorsque la Ligne tirée entre eux étant perpendiculaire sur l'un, l'est aussi sur l'autre ; ou lorsqu'étant inclinée sur l'un, elle a sur l'autre la même inclinaison.*

On jugera encore que *deux Plans sont paralleles, lorsque trois Points de l'un sont également distans de trois Points de l'autre ; pourvu néanmoins que ces trois Points ne soient point rangés en Ligne droite, mais en forme de Triangle égal & semblable.* Cette restriction est essentielle ; car deux Lignes tracées sur deux Plans non paralleles, pourroient l'être entre elles ; parceque, comme on l'a dit, une seule Ligne ne détermine pas le Plan. Fig. 11.

Enfin, *deux Plans étant paralleles, ils ne s'approcheront jamais l'un de l'autre, fussent-ils prolongés à l'infini.*



CHAPITRE II.

RENCONTRE DES PLANS.

Lorsque deux Lignes se rencontrent ou se coupent, elles ont un Point de commun, lequel appartient également aux deux Lignes.

Fig. 12. & 13. Par la même raison, lorsqu'un Plan rencontre ou coupe un autre Plan, il doit y avoir une Ligne AB, qui appartienne également aux deux Plans. Cette Ligne est appellée leur *commune Section*.

Un Plan est perpendiculaire, lorsqu'il ne panche pas plus d'un côté que de l'autre sur le Plan horizontal. Il est aisé de déterminer par-là ce qui le rendroit oblique.

Pour juger de la Perpendicularité ou de l'Obliquité d'un Plan sur un autre Plan, il faut examiner quel Angle ils forment par leur union. Pour cela sur le Plan Y soit tirée une Ligne EC perpendiculaire sur la *commune Section*, & sur le Plan X une Ligne DC aussi perpendiculaire sur la même *commune Section*, & se joignant toutes les deux au Point C. Si l'Angle ECD est droit, les Plans sont perpendiculaires : s'il est aigu ou obtus, les Plans sont obliques. Car le Plan Y est un composé de Lignes paralleles à EC; & le Plan X, de paralleles à DC. Donc toutes les Lignes correspondantes dans les deux Plans, forment des Angles égaux à l'Angle ECD, quel qu'il soit.

Nous voyons par-là, que l'Angle formé par la rencontre de deux Plans, n'est pas une nouvelle espéce d'Angle différente de l'Angle linéaire, comme on pourroit d'abord se l'imaginer. Ce nouvel Angle prétendu n'est dans le fond qu'un amas d'une infinité d'Angles linéaires exactement posés les uns à côté des autres, & dont les Sommets contigus forment la Ligne droite, appellée la *commune Section*, pendant que la Somme de leurs Côtés forme les deux Plans. LIV. III. I. SECT. I CHAP. II. Fig. 14.

Lorsqu'un Plan traverse un autre Plan, sa partie inférieure est perpendiculaire en-dessous, si la supérieure est perpendiculaire en-dessus : & si la supérieure est oblique, l'inférieure aura la même Obliquité en-dessous, mais du côté opposé. Fig. 15.

Ayant deux Plans paralleles, si un troisiéme est perpendiculaire sur l'un, il le sera aussi sur l'autre; & s'il est oblique sur l'un, il le sera également sur l'autre, mais en sens contraire. Fig. 16. & 17.

Par conséquent, *deux Plans sont paralleles, lorsqu'ils peuvent être coupés par un troisiéme Plan perpendiculaire ou également oblique sur l'un & sur l'autre.*

Deux Lignes perpendiculaires, ou également obliques en même sens sur un Plan, sont nécessairement paralleles. Mais *deux Plans perpendiculaires, ou également obliques sur un troisiéme Plan, peuvent ne pas être paralleles*, pouvant s'approcher, se rencontrer & se couper. Car les Plans tombant sur un troisiéme, peuvent ne pas conserver le même éloignement, que les deux premieres Lignes par lesquelles ils commencent. Les Lignes suivantes sont paralleles Fig. 18.

entre elles, quoique moins éloignées que les deux premieres; & c'est parcequ'elles se rapprochent, que les Plans n'ont pas de Parallélisme.

Je me contente d'énoncer ces vérités sans les démontrer rigoureusement, parcequ'elles sont assez claires par elles-mêmes. Mais il est à propos d'approfondir davantage ce que nous avons dit en deux mots au commencement de ce Chapitre sur la *commune Section* de deux Plans qui se coupent. Il est évident que si la coupe est perpendiculaire, la commune Section ne peut être qu'une seule & unique Ligne droite. Mais si l'intersection est oblique, les Plans ne se coupent-ils que dans une seule Ligne?

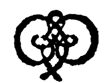
Je sçais qu'un Plan est déterminé par deux Lignes, comme une Ligne l'est par deux Points. Il est certain que deux Plans qui auroient deux Lignes entieres communes, seroient confondus l'un avec l'autre, pour ne faire qu'un seul & unique Plan. Mais s'ensuit-il qu'ils ne puissent avoir en commun la valeur de plus d'une Ligne, & se couper dans la Largeur de plusieurs Lignes contigues?

Il est clair qu'il faut raisonner sur la Section des Plans, comme sur la Section des Lignes; car les Plans ne sont qu'une suite de Lignes paralleles & contigues, & leur commune Section n'est qu'une suite d'intersections de Lignes. Donc ce qui est vrai d'une Ligne, est vrai de toutes. Or nous avons prouvé dans la premiere Partie de la seconde Section du second Livre, que les Lignes qui se coupent obliquement, se coupent dans

V. la Fig. 2. de la I. Pl. pour la II. Sect. du II. Livre.

dans la valeur de plus d'un Point. On peut revoir, si l'on veut, la Figure dont on s'est servi pour développer cette vérité. Aux Lignes, substituez des Plans : la conclusion sera la même.

Il est inutile de s'étendre davantage sur une matiere déja suffisamment expliquée. Mais il ne l'est pas de remarquer, que si la Géométrie n'envisage ordinairement dans le Plan que les Dimensions de Longueur & de Largeur, elle n'en exclut en aucune sorte la Profondeur ou l'Epaisseur. Tous ses principes vont au contraire à établir que les Figures planes considérées comme des parties intégrantes de l'Etendue, doivent nécessairement en avoir la troisiéme Dimension; sans quoi leur multitude ne pourroit jamais produire un Solide. D'un autre côté, les Surfaces ne seroient point Elément du Solide, si leur épaisseur étoit d'une grandeur assignable : toute Surface seroit dès-lors un Solide tout formé. Leur épaisseur doit donc être telle, qu'il en faille une infinité posées les unes sur les autres sans intervalle, pour faire le Solide le moins profond. Donc l'épaisseur d'une Surface géométrique doit être infiniment mince, de même que la Largeur d'une Ligne & la Longueur d'un Point sont infiniment petites.



LIV. III.
I. SECT.
CHAP. III.

CHAPITRE III.

Formation des Angles solides.

NOus connoissons l'Angle-plan ou linéaire formé par l'ouverture de deux Lignes, & renfermant un espace déterminé par la position des jambes de l'Angle, mais indéfini du côté de la Base qui n'existe pas, & qu'on peut approcher ou éloigner du Sommet à l'infini, sans que l'Angle change de nature.

Fig. 19, 20, 21, 22. Mais l'*Angle solide est formé par la rencontre de plusieurs Angles-plans qui se joignent exactement par leurs côtés, & qui réunissent leurs Sommets en un seul Point A, lequel est le Sommet de l'Angle solide.*

L'Angle solide contient donc un espace terminé de tous côtés par les Angles-plans, mais indéfini du côté de la Base qu'on peut approcher ou éloigner du Sommet à l'infini.

Ainsi, les Angles-plans sont à l'Angle solide qu'ils forment par leur réunion, ce que les Lignes qui se rencontrent en un Point, sont à l'Angle-plan. Mais deux Lignes suffisent tellement pour former ce dernier Angle, qu'une troisiéme Ligne en formeroit un nouveau : au lieu qu'il faut au moins trois Angles-plans pour former un Angle solide. Car si l'on unissoit seulement deux Angles-plans, il est évident qu'à moins qu'ils ne fussent couchés l'un sur l'autre, il y auroit un côté par lequel ils ne se touche-

Fig. 19, 21.

roient pas; & l'intervalle qu'ils laisseroient entre eux, n'étant pas rempli, l'espace que l'Angle solide doit contenir ne seroit pas terminé de toutes parts. Il faut donc au moins un troisiéme Angle pour achever la clôture, & pour joïndre les deux premiers Angles-plans.

Liv. III. I. Sect. Chap. III.

On comprendra aisément que *si trois Angles plans forment un Angle solide, deux de ces Angles-plans, pris ensemble, doivent être plus grands que le troisiéme.* Car ces trois Angles-plans peuvent être mesurés par des Lignes droites tirées à distance égale de leur Sommet, lesquelles se joignant toutes les trois par leurs extrémités, formeront un Triangle dont deux côtés pris ensemble sont plus grands que le troisiéme. Fig. 19, 21. Fig. 21.

Mais si trois Angles-plans suffisent absolument pour former un Angle solide, il peut être formé par quatre, par cinq, & même par une infinité d'Angles-plans, dont les Sommets se réuniront dans un seul Point. Fig. 20, 22.

L'espace contenu dans un Angle-plan va toujours en croissant depuis le Sommet; & cet accroïssement est mesuré par des Lignes droites tirées parallelement les unes aux autres entre les côtés de l'Angle. De sorte que si l'on supposoit ces côtés prolongés à l'infini, & tous les Points de ces côtés joints ensemble par des Lignes paralleles, on auroit dans ces Lignes toutes les Bases possibles de l'Angle-plan. Fig. 23.

De même, dans un Angle solide, l'espace contenu entre les Angles-plans va toujours en croissant depuis le Sommet. Mais pour terminer cet espace, il est évident qu'au lieu de Lignes il

Liv. III. I. Sect. Chap. III.

faut des Surfaces ; & que ces Surfaces seront des Polygônes d'autant de côtés qu'il y a d'Angles plans pour former l'Angle solide. De sorte que si l'on supposoit ces Angles-plans prolongés à l'infini, & terminés par des Polygônes paralleles tirés à toutes les distances du Sommet, on auroit toutes les Bases possibles de l'Angle solide.

Fig. 20, 21, 22.

Il est donc manifeste que la quantité d'Angles plans nécessaires pour former un Angle solide, dépend de la qualité du Polygône qui peut lui servir de Base. Si ce Polygône est un Triangle, & que sur chaque Côté de ce Triangle on éleve obliquement des Angles, dont les jambes s'approchant, aillent réunir leurs Sommets dans un Point commun, l'Angle solide qu'ils formeront sera entouré de trois Angles-plans. Il en faudra quatre, si la Base polygonale est un Quadrilatere : cinq, si la Base est un Pentagône ; & ainsi à l'infini.

Fig. 39.

Supposons maintenant que l'on soit parvenu à cette Base d'une infinité de Côtés, c'est-à-dire, que la Base de l'Angle solide soit un Cercle, une Ellypse, &c. il est évident qu'il faudra une infinité d'Angles-plans pour former l'Angle solide élevé sur une pareille Base. Et comme toutes les Bases possibles de cet Angle, en remontant vers le Sommet, sont des Cercles, des Ellypses, ou d'autres Polygônes courbes semblables à celui de la Base inférieure, l'Angle sera arrondi de toutes parts, & les Surfaces infiniment étroites dont il sera environné, disparoîtront pour ne présenter qu'une seule Surface courbe.

Lorsque l'on donne une Base à un Angle soli-

de, on fait par le bas autant d'Angles ſolides, que la Baſe polygonale a d'Angles-plans. Car chaque Angle de ce Polygône, ſe joignant à deux Angles des Triangles latéraux, dans un Sommet commun, il en réſulte un eſpace enfermé dans tout ſon contour, c'eſt-à-dire, un Angle ſolide.

D'où il ſuit, que quelque ſoit le nombre d'Angles-plans employés pour former un Angle ſolide, ceux qui ſe formeront par la Baſe, ne ſeront formés que par trois Angles-plans.

Mais ce qu'il importe encore plus d'obſerver, c'eſt que, quelque ſoit le nombre d'Angles-plans employés à former l'Angle ſolide; quelque grandeur que l'on ſuppoſe à chacun d'eux, *jamais ils n'auront tous enſemble la valeur de quatre Angles droits.*

Car quatre Angles droits, ou la valeur de quatre Angles droits, ſont néceſſairement arrangés ſur un Plan autour d'un Point qui leur ſert de Sommet. Si l'on marque un Point ſur un Plan, & que de ce Point l'on tire des Lignes de tous côtés, tous les Angles formés par ces Lignes ſont égaux à quatre droits. Le Point central ne pourroit devenir Sommet d'un Angle ſolide, qu'en s'élevant au-deſſus du Plan; & s'il s'éleve, les Angles-plans dont il eſt le Sommet commun, ſe croiſeront néceſſairement les uns ſur les autres, plus ou moins, ſelon que le Point central ſera plus ou moins élevé. Fig. 24.

De même, ſi l'on affaiſſe ſur un Plan le Sommet du plus grand Angle ſolide que l'on puiſſe imaginer, les Angles-plans qui le forment s'écar-

teront néceſſairement les uns des autres pour s'étendre ſur le Plan. Or leurs écartemens formeront de nouveaux Angles-plans, qui joints aux premiers, ſont égaux à quatre droits. Donc les Angles-plans qui formoient l'Angle ſolide, ne montoient pas enſemble à la ſomme de quatre Angles droits.

Un Angle ſolide peut donc approcher à l'infini de la valeur de quatre Angles droits, ſans jamais y parvenir, de même qu'un Angle-plan peut approcher à l'infini de la valeur de deux droits ſans jamais y arriver. Un Angle obtus égal à deux droits, ceſſeroit d'être Angle, & ne ſeroit qu'une Ligne droite. De même, un Angle ſolide dont les Angles-plans formateurs ſeroient égaux à quatre droits, ceſſeroit d'être Angle, & ne ſeroit qu'un Plan.

Ce rapport des Angles ſolides avec les Angles-plans donne droit d'appliquer aux premiers comme aux ſeconds la célébre diviſion des Angles, en *droits*, *obtus* & *aigus*.

Un *Angle-ſolide-droit* eſt celui qui ſeroit formé par trois *Angles-plans-droits*, dont les Sommets ſe réuniroient en un ſeul Point. Tel eſt l'Angle du Cube. Ces trois Angles ſe rencontrent perpendiculairement par leurs côtés; & cette Perpendicularité mutuelle des trois Plans conſtitue la Rectitude de l'Angle ſolide, comme la Perpendicularité de deux Lignes conſtitue la Rectitude de l'Angle-plan.

Par la même analogie, l'Angle ſolide ſera *aigu*, lorſque les Angles-plans qui le forment ſeront au-deſſous de la valeur de trois Angles droits; & *obtus*, s'ils ſont au-deſſus.

CHAPITRE IV.

Les Polyëdres divisés dans leurs diverses espéces.

IL faut au moins trois Lignes pour terminer un espace plan. Aussi le Triangle est-il le premier & le plus simple de tous les Polygônes. Les autres plus composés ne sont diversifiés que par le nombre de leurs côtés & de leurs Angles. Un Quadrilatére est un Polygône de 4 Côtés & de 4 Angles : un Pentagône a 5 Angles & 5 Côtés. Un Cercle enfin est un Polygône d'une infinité de Côtés & d'une infinité d'Angles.

Mais le plus simple de tous les Polyëdres a nécessairement quatre Faces & quatre Angles solides. Car si l'on fait un Angle solide avec trois Angles-plans, & qu'on le termine par une Base, cette Base, qui ne peut être qu'un Triangle, sera la quatriéme Face, laquelle avec les trois autres Triangles formera trois nouveaux Angles solides. Fig. 21. & 36.

Nous avons vû dans le Chapitre précédent, que si la Base d'un Angle solide étoit un Quadrilatére, l'Angle du Sommet seroit formé par quatre Angles-plans ; & qu'ainsi le Polyëdre auroit en tout 5 Faces & 5 Angles : que si la Base étoit un Pentagône, le Polyëdre auroit 6 Faces & 6 Angles ; & ainsi de suite. Fig. 37. Fig. 38.

On pourroit donc croire en se contentant de ce leger rapport, que ces Polyëdres répondroient parfaitement à toutes les espéces de

Polygônes, dont les Angles & les Côtés croissent selon l'ordre des nombres.

Fig. 25, 26, &c. Mais à quelle espéce de Polygônes rapporterions-nous les Solides, qui partant d'une Base quelconque, conservent toujours la même grosseur? Car dans ces Polyëdres l'accroissement des Angles est toujours double de celui des Côtés. Fig. 26, 27. Prenons, par exemple, un de ces Polyëdres dont la Base est un Triangle: cette Figure aura 5 Faces & 6 Angles. Fig. 25. Si la Base est un Quadrilatére, la Figure aura 6 Faces & 8 Angles. Fig. 28. Elle aura 7 Faces & 10 Angles, si la Base est un Pentagône, & ainsi de suite. Par où l'on voit que dans cette espéce de Polyëdres, l'accroissement des Faces suit la Raison arithmétique 5, 6, 7, 8, &c. & l'accroissement des Angles, une autre Raison arithmétique 6, 8, 10, 12, &c.

Ce n'est donc que par leurs Bases, qui sont en effet des Figures planes, que ces deux espéces de Polyëdres paroissent répondre à tous les Polygônes possibles.

Je pourrois encore demander, à quelle espéce de Polygônes on rapporteroit les Solides environnés d'une multitude de petites Surfaces, dont aucune ne paroît plus qu'une autre destinée à servir de Base au tout? Je demanderois encore, si les Sphéres ne tiennent pas plus au Cercle, que les autres Solides qui ne ressemblent à ce Polygône que par des Bases circulaires? Mais il est inutile de pousser plus loin ce détail. Il est certain que la combinaison de la troisiéme Dimension avec les deux premieres, doit multiplier les Figures possibles. D'où je conclus que

si l'on veut suivre dans la distribution des Figures solides l'analogie des Figures planes, il faut prendre les choses plus en grand, & s'élever au-dessus des petits rapports.

Nous avons vû dans le Livre précédent, Sect. II. Part. II. pag. 195. que l'on pouvoit distribuer en quatre classes tous les Polygônes possibles.

La premiere comprend tous ceux qui partant d'une Base quelconque, conservent toujours la même Largeur. Tels sont les Parallélogrammes tant rectangles qu'inclinés.

La seconde classe comprend les Polygônes qui partant d'une Base quelconque, vont toujours en se retrécissant jusqu'à ce que les Lignes latérales se réunissent en un Point. Tels sont 1°. les Triangles. 2°. Les Trapèzes & tous les Quadrilatéres irréguliers qui sont des Triangles tronqués.

La troisiéme classe comprend les Polygônes de plus de quatre Côtés. Ce sont ceux ausquels il est difficile de déterminer une Base; parce-qu'en les posant sur un de ces Côtés, l'espace va d'abord en augmentant, & ensuite en diminuant.

Enfin, l'on met dans la quatriéme classe les Polygônes d'une infinité de Côtés, c'est-à-dire, ceux qui sont terminés par une seule Ligne courbe, soit circulaire, soit ellyptique, soit d'une autre forme: mais de tous ces Polygônes, la Géométrie ordinaire ne considére que le Cercle.

Cette distribution s'applique admirablement aux Figures solides, en conservant néanmoins

le caractère essentiel qui distingue la Solidité, de la simple Superficie.

Car, ou les Solides en partant de leur Base, conservent toujours la même grosseur; & c'est la premiere classe.

Ou bien en partant de la Base, ils vont en diminuant jusqu'à finir en un seul Point; & c'est la seconde classe.

Ou bien ils vont d'abord en augmentant, & ensuite en diminuant; & c'est la troisiéme classe.

Ou bien enfin, ils sont environnés d'une Surface courbe; & c'est la quatriéme classe.

Il est manifeste qu'il n'y a point de Solide qu'on ne puisse rapporter à quelqu'un de ces quatre chefs. Nous allons les parcourir pour nous en former une idée plus nette.

---

§. I.

Premiere classe des Polyëdres.

LES PRISMES.

Fig. 25, 26, &c. On donne le nom de *Prismes* aux Polyëdres qui s'élevant sur une Base quelconque, conservent toujours la même grosseur, comme le Parallélogramme conserve la même largeur sur sa Base linéaire.

Il suit de cette définition, 1°. que tout Prisme a deux Bases paralleles, l'une supérieure & l'autre inférieure, qui sont des Polygônes semblables & égaux.

2°. Que les Faces latérales des Prismes sont des Parallélogrammes. Car les deux Bases étant paralleles & égales, leurs extrémités ne peuvent être jointes que par des Lignes paralleles & égales entre elles. Les Prismes ont donc autant de Parallélogrammes environnans que chaque Base a de Côtés. [redacted] LIV. III. I. SECT. CHAP. IV. §. I.

3°. Que le Prisme est composé d'une multitude de Tranches polygonales posées exactement les unes sur les autres, & parfaitement égales & semblables aux deux Bases. C'est-là ce qui distingue essentiellement le Prisme de la Pyramide, comme nous l'allons dire au §. suivant. Car dans celle-ci les Tranches paralleles sont bien des Polygônes semblables à la Base; mais ils ne sont pas égaux, puisqu'ils vont toujours en diminuant, jusqu'à ce qu'ils se réduisent au Point. Fig. 25. 26.

On se représente sans peine le Polygône que donne la coupe des Prismes. Si la coupe est parallele aux Bases, elle donnera un Polygône égal & semblable. Mais une coupe oblique ne peut donner qu'un Polygône plus allongé, quoique de même nombre de Côtés. Si la coupe est de haut en bas, & que les scissions se fassent dans deux Lignes correspondantes de la Base supérieure & de l'inférieure, la Section doit être un Parallélogramme formé par les deux Lignes latérales, & par les deux Lignes qui coupent les Bases.

Le Prisme est droit, lorsque l'Axe est perpendiculaire sur les deux Bases: il est incliné, lorsque l'Axe est oblique. On appelle *Axe* du Prisme, Fig. 29. 30.

la Ligne droite qui joint le Centre des deux Bases : & le Côté du Prisme, une Ligne droite tirée d'un Point pris dans le Périmétre de la Base supérieure, au Point correspondant de l'inférieure : & comme les deux Bases sont paralleles, le Côté du Prisme est toujours égal à l'Axe.

Fig. 29, 30. La Hauteur du Prisme se mesure par une Perpendiculaire tirée d'un Point quelconque de la Base supérieure, sur l'inférieure, prolongée s'il en est besoin. Cette Perpendiculaire est égale à l'Axe & au Côté, si le Prisme est droit ; & plus courte que l'un & l'autre, si le Prisme est incliné.

Fig. 29 & 30. Le Prisme droit a pour Faces latérales des Parallélogrammes rectangles & perpendiculaires sur la Base. Mais s'il est incliné, une partie des Faces sera des Rectangles ; & l'autre partie, des Parallélogrammes inclinés. C'est ce que l'inspection des Figures éclaircira mieux que tous les discours.

Si les Bases d'un Prisme droit sont des Polygônes réguliers, les Parallélogrammes environnans seront des Rectangles égaux ; & inégaux, si les Bases du Prisme sont des Polygônes irréguliers.

Le Prisme tire ses diverses dénominations de la forme des Polygônes qui lui servent de Bases. Si les Bases sont des Triangles, des Quadrilatéres, des Pentagônes, des Exagônes, &c. le Prisme sera triangulaire, quadrilatéral, &c.

Fig. 29 & 30. Mais entre tous ces Prismes, le quadrilatéral mérite une attention particuliere, lorsqu'il a pour Base un Parallélogramme. Le Prisme alors

prend le nom de *Parallélipipéde*. Ce qui signifie que non-seulement ses Bases sont des Parallélogrammes égaux, semblables & paralleles; mais que des quatre Parallélogrammes environnans, les deux opposés sont aussi paralleles & égaux.

Si la Base du Parallélipipéde droit est un Rectangle, on pourra dire que le Parallélipipéde est rectangle, & que tous ses Angles solides sont droits, comme étant formés chacun par l'union de trois Angles-plans-droits, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus. Fig. 29.

Si la Base du Prisme droit est un quarré, & que la Hauteur soit égale au Côté de la Base, le Parallélipipéde est un *Cube*, dont les 6 Faces sont des Quarrés. Fig. 31.

Lorsque le Prisme a pour Base un Polygône d'une infinité de Côtés, un Cercle, par exemple, il quitte le nom de Prisme, & prend celui de *Cylindre*. Or il est aisé d'appliquer au Cylindre toutes les propriétés essentielles du Prisme. Fig. 32, 33.

1°. Le Cylindre est environné de Parallélogrammes dont la Largeur est infiniment petite, & dont les Bases sont les Côtés infiniment petits du Polygône circulaire.

2°. On y distingue encore plus aisément que dans les autres Prismes un Axe, des Côtés, une Hauteur perpendiculaire. Il peut d'ailleurs, comme les autres Prismes, être droit ou incliné.

3°. Le Cylindre doit être composé d'une infinité de Tranches circulaires parfaitement égales aux deux Bases, & posées les unes sur les autres sans intervalle.

4. Si l'on coupe le Cylindre parallélement Fig. 34.

aux Bases, la Section donnera un Cercle parfaitement égal; & ce sera un Cercle allongé, c'est-à-dire, une Ellypse, si la Section n'est pas parallele. Une Section du haut en bas par deux Cordes correspondantes dans les Bases, donnera, comme dans les autres Prismes, un Parallélogramme formé par les Côtés du Cylindre, & les deux Cordes des Bases. Mais si la Section ne passoit pas par deux Cordes correspondantes des Bases, on auroit une Figure plane, dont deux Côtés opposés seroient deux Lignes droites paralleles; & les deux autres, deux Lignes courbes en forme d'Arc ellyptique.

Fig. 35. 5°. On peut concevoir la génération du Cylindre par la rotation d'un Parallélogramme rectangle, que par cette raison on appelle *générateur*.

Soit le Rectangle ABCD. De tous les Points de AB pris pour l'Axe du Cylindre, soient tirées à tous les Points de CD des Perpendiculaires qui seront en même tems paralleles aux Bases CA, DB. Qu'on fasse ensuite tourner le Rectangle autour de l'Axe AB comme sur un Pivot immobile : le Cylindre sera formé par cette révolution. La Surface latérale, par la Ligne CD : les deux Bases, par les Raïons égaux AC, BD. Enfin toutes les Tranches circulaires dont le Cylindre est composé, par les Paralleles aux deux Bases dont tout le Rectangle est couvert.

§. II.

Seconde classe des Polyëdres.

LES PYRAMIDES.

UN Solide, qui s'élevant sur un Polygône quelconque qui lui sert de Base, va toujours en diminuant, est appellé *Pyramide*. S'il s'éleve jusqu'à se terminer en un seul Point, la Pyramide est entiere : s'il reste en-dessous, la Pyramide est *tronquée*. En la continuant, il seroit aisé de l'achever. Fig. 36. & suiv.

On voit par-là que la Pyramide est parmi les Solides ce que le Triangle est parmi les Polygônes ; & que la Pyramide *tronquée* répond aux Trapèzes & aux Quadrilatéres irréguliers.

Il est vrai que les Triangles ne peuvent avoir que trois Côtés ; & qu'au contraire le nombre des Faces de la Pyramide peut varier à l'infini. Cela vient de ce que l'Angle-plan ne peut être formé que par deux Lignes ; au lieu que l'Angle solide peut être formé par un grand nombre d'Angles-plans. A cette différence près, la Pyramide tient tellement du Triangle, qu'on pourroit l'appeller un *Triangle solide*. Et en effet, à l'exception de la Base qui peut être un Polygône quelconque, toutes les Faces des Pyramides sont nécessairement des Triangles. Car les Côtés de la Base polygonale donnent des Bases linéaires à tous les Angles-plans qui forment l'Angle solide du Sommet ; & chaque Base linéaire, jointe aux

deux Côtés de l'Angle plan, forme un Triangle.

LIV. III. I. SECT. CHAP. IV. §. II. Fig. 36, 37, 38, 39.

Les Pyramides, ainsi que les Prismes, tirent leurs noms de la forme du Polygône qui leur sert de Base. Ainsi, l'on appelle Pyramide *triangulaire*, celle dont la Base est un Triangle: *quadrangulaire*, celle dont la Base est un Quadrilatére: *pentagonale*, *exagonale*, *&c.* celles dont la Base est un Pentagône, un Exagône, &c. Enfin, on appelle *Cône*, celle dont la Base est un Polygône d'une infinité de Côtés, c'est-à-dire, un Cercle, une Ellypse, &c. Mais de toutes ces espéces de Cônes, la Géométrie ordinaire ne considére que ceux dont la Base est circulaire.

Le *Cône*, ainsi que les autres Pyramides, est environné de Triangles. Mais ces Triangles étant infiniment étroits, ne paroissent que des Lignes, dont l'amas semble former une seule & unique Surface courbe sans Angles, comme la Ligne circulaire paroît n'être qu'une seule Ligne, quoiqu'elle soit composée d'une infinité de Directions différentes. Ainsi, le Cône est dans la classe des Pyramides, ce que le Cylindre est dans celle des Prismes.

La Base du Cône étant un Polygône d'une infinité de Côtés, donne des Bases linéaires à tous les Triangles latéraux, dont la multitude infinie forme la Surface du Cône: & ces Triangles dont la Base est infiniment petite, vont toujours en se retrécissant jusqu'au Sommet commun.

Fig. 38 & 40.

La Pyramide peut être droite ou inclinée. Elle est droite, lorsque la Pointe est élevée perpendiculairement

diculairement sur le Point-milieu de la Base; & inclinée, lorsque la pointe ne répond qu'obliquement sur ce Point-milieu.

On nomme *Axe* de la Pyramide, la Ligne droite tirée de la pointe du Sommet au Centre de la Base. C'est de la Perpendicularité ou de l'Obliquité de cette Ligne, que dépend la rectitude ou l'inclinaison de la Pyramide. Fig. 39 & 41.

Lorsque l'Axe est perpendiculaire, il mesure la Hauteur de la Figure. Mais lorsque l'Axe est oblique, la Hauteur est exprimée par une Perpendiculaire abaissée du Sommet sur la Base, prolongée s'il en est besoin. Il n'est pas nécessaire d'avertir que tout ceci convient au Cône comme aux autres Pyramides. Fig. 40, 41.

Le *Côté* de la Pyramide se prend quelquefois pour un des Triangles latéraux ABC; & quelquefois pour une Ligne AH abaissée perpendiculairement du Sommet sur la Base BC de l'un de ces Triangles. Mais il n'est guères question du *Côté* des Pyramides ordinaires. Celui du Cône droit est d'un plus grand usage. C'est une Ligne droite tirée du Sommet de l'Angle à la Circonférence de la Base circulaire. Dans le Cône droit toutes ces Lignes latérales sont égales, parcequ'elles sont également obliques sur la Base; & également distantes de l'Axe perpendiculaire. Fig. 22. Fig. 39.

La capacité d'un Triangle est parfaitement remplie, si depuis le Sommet jusqu'à la Base, on le couvre de Lignes paralleles à celle-ci; & ces Lignes vont en décroissant depuis la Base jusqu'au Sommet. Si le Triangle est isocelle, le décroissement se fait des deux Côtés en même Fig. 42, 43.

Liv. III. I. Sect. Chap. IV. §. II.

Raison. Le décroissement ne sera pas si régulier lorsque le Triangle est scalène.

Fig. 44. On comprendra aisément ce qui remplit l'espace d'une Pyramide, en substituant aux Lignes du Triangle des Tranches infiniment minces posées parallélement les unes sur les autres, & sans intervalle depuis la Base jusqu'au Sommet : ensorte que ces Tranches diminuent de grandeur selon une Raison quelconque.

Si le décroissement des Tranches paralleles est en Raison égale de tous côtés, la Pyramide est droite, & répond au Triangle isocelle. Mais si le décroissement se fait inégalement, la Pyramide est inclinée, & répond au Triangle scalène.

Fig. 45. Il suit de-là, que *si l'on coupe une Pyramide parallélement à sa Base, la section présentera un Polygône parfaitement semblable*; mais d'autant plus petit, que la section aura été faite plus près du Sommet.

Mais si la section de la Pyramide n'étoit pas parallele à la Base, elle présenteroit un Polygône plus allongé, de même nombre de Côtés, mais nullement semblable à la Base.

Si l'on coupe la Pyramide de haut en bas par le Sommet, la section sera un Triangle formé par deux Lignes latérales, & par la Ligne de scission dans la Base de la Pyramide.

Appliquons tout ceci au Cône, la plus importante de toutes les Pyramides.

Fig. 46. La section du Cône parallélement à sa Base est un Cercle plus petit que celui de la Base; & d'autant plus petit que la section aura été faite plus près du Sommet.

Si la ſection n'eſt pas parallele à la Baſe, on aura une *Ellypſe*, Polygône plus allongé que le Cercle. Liv. III. I. Sect. Chap. IV. §. II.

La ſection d'un Cône par le Sommet donne un Triangle formé par deux Côtés du Cône & par la Ligne de ſciſſion dans la Baſe circulaire. Fig. 46.

La ſection du Cône parallélement à l'Axe, donne une Courbe connue ſous le nom d'*Hyperbole*. Fig. 47.

On auroit une autre Courbe nommé *Parabole*, ſi la ſection étoit parallele au Côté du Cône. Fig. 48.

Ces deux Courbes, & l'*Ellypſe*, ſont les trois célébres *Sections coniques*. Elles ne ſont pas du reſſort de la Géométrie ordinaire.

Il ne nous reſte plus qu'à faire comprendre la génération du Cône droit. Pour cela ſoit un Triangle rectangle ASC. Suppoſons que ſur tous les Points de SC on éleve des Perpendiculaires terminées au Côté SA. Toutes ces Perpendiculaires paralleles à la Baſe AC vont en diminuant juſqu'au Sommet, & rempliſſent exactement l'eſpace du Triangle. Fig. 49.

Maintenant faiſons faire à ce Triangle une révolution entiere autour de la Perpendiculaire SC, comme ſur un pivot immobile. Le Cône droit ſera formé par ce mouvement. La Ligne SC ſera l'Axe, & le Point S le Sommet. La Surface conique ſera décrite par l'oblique SA. La Baſe circulaire par le Raïon CA; & toutes les Tranches paralleles dont le Cône eſt compoſé, par les Raïons paralleles au Raïon CA.

Ce Triangle eſt *générateur du Cône*, comme le Parallélogramme rectangle eſt générateur du Cylindre.

LIV. III.
I. SECT.
CHAP. IV.
§. III.

§. III.

Troisiéme classe. Polyëdres à facetes.

LEs Solides à *facetes* sont ceux, qui posés sur l'une de leurs Faces prise pour Base, s'élevent en augmentant de volume, & vont ensuite en se retrécissant. Nous avons dit que ces Polyëdres répondent aux Polygônes plans de plus de quatre Côtés.

Mais si ces Polygônes fournissent peu aux spéculations de la Géométrie, nos Polyëdres de la troisiéme classe y fournissent encore moins. Ce n'est pas qu'on ne puisse imaginer des Solides à facetes variés à l'infini. Mais s'ils sont irréguliers, la Géométrie ne peut avoir de prise sur eux, qu'en les partageant en Pyramides & en Prismes : de même qu'on réduit les Surfaces irrégulieres en Parallélogrammes & en Triangles.

Il n'y a donc que les Solides réguliers à facetes qui pourroient fixer notre attention. Mais c'est ici que nous sentirons notre indigence. Tout Polygône, de quelque nombre de Côtés qu'on le suppose, peut être régulier ; parcequ'ayant un Cercle, je puis en partager la Circonférence en autant d'Arcs égaux qu'il me plaira, & par conséquent inscrire dans ce Cercle le Polygône régulier que j'ai dans l'esprit. Au lieu que l'on ne peut trouver que cinq Solides vraiment réguliers, comme on le verra

dans l'inſtant. Encore de ces cinq, il y en a un de la premiére claſſe, & un autre de la ſeconde. Reſte donc trois Solides réguliers à facetes pour répondre à l'infinité des Polygônes réguliers de plus de quatre Côtés.

Quand on parle en Géométrie de Figures régulieres, il faut toujours entendre une régularité parfaite. Un Triangle Iſocelle, un Parallélogramme rectangle, ont une certaine régularité. Il en eſt de même du Cône & du Cylindre droit, auſſi-bien que des Pyramides & des Priſmes dont toutes les Faces environnantes ſont égales. Mais la régularité n'eſt qu'imparfaite, à moins que les Côtés, les Faces & les Angles ne ſoient abſolument les mêmes dans toute la Figure.

Les Polygônes ne ſont vraiment réguliers que par l'égalité de leurs Côtés & de leurs Angles. Auſſi de tous les Triangles & de tous les Quadrilatéres, il n'y a de réguliers que le Triangle équilatéral & le Quarré. De même un Solide ne peut être abſolument régulier qu'avec les deux conditions ſuivantes. 1°. Que toutes ſes Faces, y compris les Baſes, ſoient des Polygônes égaux & réguliers. 2°. Que les Angles ſolides ſoient formés par le même nombre d'Angles-plans égaux entr'eux.

Or il n'y a que cinq Solides qui puiſſent réunir ces deux conditions: ſçavoir, le *Tétraédre*, l'*Exaédre*, l'*Octaédre*, le *Dodécaédre*, & l'*Icoſaédre*.

Voyons d'abord quels Solides on pourroit conſtruire avec des Triangles équilatéraux de même grandeur.

I.

Liv. III. I. Sect. Chap. IV. §. III. Fig. 50.

JE conçois que l'on peut former un Angle solide avec trois Angles de Triangles équilatéraux. Car chacun de ces Angles n'étant que de 60 Degrés, les trois ensemble ne sont que de 180, valeur fort inférieure à celle de quatre Angles droits.

Ces trois Triangles équilatéraux forment par leurs Bases un nouveau Triangle équilatéral, égal & semblable aux trois premiers. Par conséquent, il se formera à cette Base triangulaire trois nouveaux Angles solides, dont chacun sera formé par trois Angles-plans de 60 Degrés. Donc le Polyëdre aura quatre Angles solides égaux, & quatre Faces égales & semblables.

C'est le *Tétraédre* ou la Pyramide réguliere, qui, comme l'on voit, appartient à la seconde classe des Solides, plutôt qu'à la troisiéme. On ne peut la mettre au rang des Figures à facetes, que parceque chaque Face peut être prise indifféremment pour Base, sans qu'il arrive aucun changement dans la Figure, soit pour la forme, soit pour la Hauteur.

2.

Fig. 51. ON peut aussi former un Angle solide avec quatre Triangles équilatéraux de même grandeur. Car la valeur de quatre Angles de ces Triangles n'est que de 240 Degrés.

Ces quatre Triangles bornés par une Base quarrée, formeroient une Pyramide quadrangulaire. Mais au lieu de la terminer ainsi, si on lui addosse une Pyramide égale & de même forme, il en résultera un Polyëdre à facetes, lequel

aura 6 Angles solides égaux, & pour Faces 8 Triangles équilatéraux de même grandeur. C'est l'*Octaédre.*

3.

ON peut encore former un Angle solide avec cinq Angles de Triangles équilatéraux, dont la valeur n'est que de 300 Degrés. Or en joignant à ces cinq Triangles autant d'autres de même forme & de même grandeur qu'il en faut, pour que tous les Angles de la Figure soient formés par cinq Angles plans de 60 Degrés chacun, il en résultera un Polyëdre à facettes, lequel aura 12 Angles solides égaux, & pour Faces 20 Triangles équilatéraux. C'est l'*Icosaédre.* Fig. 52.

Mais on ne peut former d'Angle solide avec six Triangles équilatéraux; parceque, six de ces Angles font 360 Degrés valeur de quatre Angles droits. Ces six Angles ne peuvent avoir un Sommet commun que sur un Plan. Ainsi, le Triangle équilatéral ne peut former que les trois Polyëdres précédens.

4.

JE passe au Quarré; & je vois que trois Quarrés égaux peuvent former un Angle solide. Joignant donc trois autres Quarrés égaux aux trois premiers, il en résultera un Polyëdre, lequel aura 8 Angles égaux; & pour Faces, 6 Quarrés. C'est l'*Exaédre* ou le *Cube.* Il est clair que quatre Angles de Quarrés étant quatre Angles droits, ne peuvent se réunir dans un Sommet commun que sur un Plan; & par conséquent, que le Cube est le seul Solide qui puisse être construit avec des Quarrés. Fig. 53.

On voit au reste que le Cube ne peut passer pour un Polyèdre à facetes, que parceque l'on peut prendre indifféremment pour Base celle de ses Faces que l'on voudra, sans qu'il arrive aucun changement dans la Hauteur & dans la forme de la Figure. Car d'ailleurs il est manifeste que ce Solide appartient à la premiere classe, & n'est autre chose qu'un Parallélipipéde régulier.

5.

Fig. 54. DU Quarré je passe au Pentagône régulier. L'Angle de ce Polygône est de 108 Degrés. Ainsi, trois de ces Angles peuvent former un Angle solide. A ces trois premiers Pentagônes, joignant six autres de même grandeur en bande, & ensuite trois autres en Pointe, l'on aura un Polyèdre à facetes, lequel sera composé de 20 Angles solides égaux & de 12 Faces pentagonales régulieres. C'est le *Dodécaèdre*.

Quatre Angles du Pentagône régulier montant à 432 Degrés, sont au-dessus de la valeur de quatre Angles droits; & par conséquent ne peuvent être joints dans un Sommet commun même sur un Plan. A plus forte raison ne peuvent-ils entrer dans la construction d'un Angle solide.

Trois Angles de l'Exagône régulier valent quatre droits. Car chacun est de 120 Degrés. Ils peuvent donc s'arranger autour d'un Sommet commun, mais seulement sur un Plan. Donc ils ne peuvent entrer seuls dans la formation d'un Angle solide. On ne peut à plus forte raison construire des Angles solides avec des Angles plans d'Eptagônes réguliers ou de Polygônes

d'un plus grand nombre de Côtés. Donc il ne peut y avoir d'autres Polyëdres réguliers que les cinq que nous venons de décrire.

Pour les saisir avec plus de facilité sans se fatiguer l'imagination, il est à propos de les avoir en relief, ainsi que la plûpart des autres Figures solides. J'en joins ici le développement, à l'aide duquel on les pourra construire soi-même avec du carton.

6.

LA propriété la plus importante des Polyëdres réguliers, c'est d'avoir avec la Sphére le même Rapport que les Polygônes réguliers ont avec le Cercle, c'est-à-dire, que ces Solides peuvent être inscrits ou circonscrits à la Sphére, comme les Polygônes le peuvent être au Cercle.

En effet, l'égalité parfaite des Angles solides, & la position uniforme des Faces égales & semblables démontrent dans le Solide comme dans le Polygône régulier, que la Figure a un Centre commun, également éloigné du Sommet de chaque Angle, & du Centre de chaque Face. Les Lignes tirées du Centre commun au Sommet des Angles sont les grands Raïons ou Raïons obliques: & les Lignes tirées du même Centre, au Centre des Faces, sont les petits Raïons ou Raïons droits. Donc un Solide régulier peut être inscrit dans une Sphére qui auroit pour Raïon, le Raïon oblique de la Figure. Donc le même Solide pourroit être circonscrit à la Sphére, qui pour Raïon, auroit le Raïon droit.

§. I V.

Quatriéme classe des Polyëdres. La Sphére ou le Globe.

I.

NOus mettons dans la quatriéme & derniere classe les Solides terminés par une Surface courbe. On en peut concevoir une infinité; car la courbure de la Surface est autant susceptible de variations que la courbure de la Ligne. Mais la Géométrie simple qui se borne à la seule Ligne circulaire, ne considére aussi parmi toutes les Surfaces courbes possibles, que celle qui conserve une uniformité parfaite dans toute son étendue, c'est-à-dire, la Surface sphérique.

Fig. 55. *La Sphére ou le Globe est donc un Solide terminé par une seule Surface courbe dont tous les Points sont également éloignés d'un Point central.*

Cette idée générale nous présente déja un Rapport très-intime entre la Sphére & le Cercle: & nous en conclurons d'abord, 1°. que *la Sphére est parmi les Figures solides, ce que le Cercle est parmi les Figures planes.*

2°. Que *la Sphére est un Polyëdre d'une infinité de Faces, comme le Cercle est un Polygône d'une infinité de Côtés.* Car la même raison qui ne permet pas de considérer la Ligne circulaire comme composée de Points indivisibles, & qui nous oblige de la regarder comme un Polygône

dont les Côtés ſont infiniment petits, doit nous [redacted] faire conclure que la Surface de la Sphére eſt compoſée d'une infinité de facetes infiniment petites. Liv. III. I. Sect. Chap. IV. §. IV.

3°. Que la Sphére eſt une Figure auſſi réguliere dans ſon genre, que le Cercle l'eſt dans le ſien. Car une ſeule Ligne droite, un ſeul Raïon tiré du Centre à un Point quelconque du Périmétre détermine invariablement la grandeur de l'une & de l'autre Figure ; ce qui fait le caractere ſpécifique de la parfaite régularité.

2.

La génération de la Sphére nous fera comprendre encore plus parfaitement ſa nature & ſes rapports avec le Cercle.

Soit le demi-Cercle ADB, dont C eſt le Centre : ſoit le Diamétre AB pris pour Axe : de tous les Points de l'Axe ſoient élevées des Perpendiculaires terminées à la demi-Circonférence ADB. La Perpendiculaire CD eſt Raïon du Cercle ; & les autres Perpendiculaires ſont des demi-Cordes paralleles entre elles, dont l'amas couvre tout l'eſpace du demi-Cercle. Fig. 56.

Après cette préparation, ſi l'on fait faire une révolution entiere au demi-Cercle autour de l'Axe AB que je ſuppoſe immobile, la Sphére ſera conſtruite : la Surface par la demi-Circonférence ADB ; & la Solidité, par les demi-Cordes paralleles, Raïons d'autant de Tranches circulaires de différente grandeur. Fig. 57, 58.

3.

Il ſuit de cette formation, 1°. que *tous les Raïons de la Sphére ſont égaux*. Car la Surface Fig. 55.

Liv. III. I. Sect. Chap. IV. §. IV.

de la Sphére n'est autre chose que la demi-Circonférence répétée : le Centre est le même. Donc toutes les Lignes droites tirées du Centre à la Surface sont égales dans la Sphére comme dans le demi-Cercle.

Par la même raison *les Diamétres de la Sphére sont égaux* ; puisque dans la Sphére, comme dans le Cercle, les Diamétres ne sont que des doubles Raïons. Donc encore on peut prendre pour Axe de la Sphére tel des Diamétres que l'on voudra.

On appelle Axe de la Sphére, une Ligne droite qui va d'un Point de la Surface à l'autre Point opposé en passant par le Centre, & autour de laquelle on suppose que la Sphére tourne ou peut tourner. Car lorsqu'un Globe tourne, il y a au milieu une Ligne qui ne tourne point, ou qui ne tourne que sur elle-même, & autour de laquelle toutes les parties du Globe font leur révolution. *On appelle Pôles, les deux Points extrêmes de cette Ligne.* Ces deux Points sont sur la Surface de la Sphére également éloignés du Centre.

4.

Fig. 57, 58. DAns la révolution de notre demi-Cercle, le Raïon CD a décrit un Cercle, dont le Centre est le même que le Centre de la Sphére. Les autres Perpendiculaires sur l'Axe ont décrit d'autres Cercles dont le Centre n'est pas le Centre de la Sphére, mais un autre Point quelconque de l'Axe.

1 Il est évident que le Cercle décrit par le Raïon CD est plus grand qu'aucun de ceux qui sont

décrits par les demi-Cordes paralleles. Car le Raïon CD est plus grand qu'aucune des demi-Cordes. Il y a donc deux sortes de Cercles dans la Sphére : les *grands*, qui ont un Centre commun avec la Sphére ; & les *petits*, dont le Centre est un Point quelconque de l'Axe.

Tous les grands Cercles de la Sphére sont donc *égaux : les petits sont d'autant plus grands, qu'ils sont plus près du grand Cercle ; & d'autant plus petits qu'ils sont plus près des Pôles.* Enfin *deux petits Cercles sont égaux lorsqu'ils sont à égale distance, ou du grand Cercle ou des Pôles.*

5.

DEux grands Cercles ne peuvent être paralleles dans la Sphére. Car un Diamétre quelconque étant pris pour Axe, il n'y a que le Raïon CD qui puisse décrire un grand Cercle. Toute autre Perpendiculaire sur l'Axe ne tracera qu'un petit Cercle. Fig. 56.

Par conséquent, *deux grands Cercles de la Sphére doivent nécessairement se couper.* Or dès qu'ils se coupent, ils se coupent par la moitié. Car leur Centre étant celui de la Sphére, il doit se trouver au milieu de leur *commune Section*, laquelle par conséquent est un Diamétre : au lieu que *les petits Cercles peuvent se couper en parties inégales.* C'est ainsi que dans un Cercle, deux Diamétres ne peuvent être paralleles, & se coupent toujours en deux également, à la différence des simples Cordes. Fig. 59.

On sçait encore que le Diamétre partage le Cercle en deux parties égales ; & la Corde, en deux parties inégales. *La Sphére est de même* Fig. 56, 57, 58, 60.

partagée en deux Hémisphéres égales par un grand Cercle; & par les petits Cercles, en deux portions inégales. Car le Raïon CD qui décrit le grand Cercle, partage le demi-Cercle Générateur en deux Arcs égaux. L'Arc supérieur & l'Arc inférieur produisent donc chacun une Hémisphére par leur mouvement de rotation.

6.

Fig. 56, 58.

CHacune des Perpendiculaires sur l'Axe AB décrivant un Cercle, il est évident que la Sphére est composée d'autant de Tranches circulaires, qu'il y a de Points dans l'Axe. Ces Tranches commencent d'abord par un Cercle infiniment petit, que l'on peut regarder comme la Base: les Cercles augmentent en montant jusqu'à ce qu'on parvienne à la grande Tranche formée par le Raïon CD: après quoi ils diminuent jusqu'à ce qu'ils finissent au Pôle par un autre Cercle infiniment petit.

Fig. 61.

Or comme il n'y a dans la Sphére aucun Diamétre qui ne puisse servir d'Axe: aucun Point sur la Surface, qui ne puisse servir de Base, il s'ensuit que *toute section de la Sphére par un Plan, en quelque sens qu'elle soit coupée, présentera toujours un Cercle.* En effet, tous les Points de la Circonférence de cette section sont également éloignés du Centre de la Sphére. Donc si du Point central de la Sphére on tire une Perpendiculaire sur cette section, la Perpendiculaire tombera sur un Point également éloigné de tous les Points de la Circonférence. Par conséquent, la Circonférence de la section est une Circonférence de Cercle.

7.

UN Segment *de Sphére est une portion solide retranchée de la Sphére, & comprise entre un Cercle quelconque de la Sphére, & une partie de sa Surface.* Fig. 61.

Comme on ne donne pas le nom de *Segment* au demi-Cercle séparé par un Diamétre, mais seulement à l'Arc séparé par une Corde, on ne donne aussi le nom de *Segment* de la Sphére qu'à la portion séparée par le Plan d'un petit Cercle. La partie de la Surface courbe qui couvre le Segment, est nommée *Calote sphérique.*

Un Secteur *de la Sphére est un Solide terminé dans sa partie inférieure par une Calote sphérique qui lui sert comme de Base, & dans sa partie supérieure par une Surface conique dont le Sommet est au Centre de la Sphére.* Fig. 61.

On conçoit aisément la construction du Secteur, par la rotation de l'Arc EB, compris entre les Raïons CE, CB dans le demi-Cercle générateur. Par où l'on voit que le Secteur est composé 1°. d'un Segment produit par le mouvement de l'Arc EB & de la demi-Corde EF, autour de la partie FB de l'Axe de la Sphére. 2°. D'un Cône droit dont le Sommet est en C, dont la Surface est décrite par la rotation du Raïon CE, dont l'Axe est la partie CF de l'Axe de la Sphére, & dont la Base est le Cercle décrit par la révolution de la demi-Corde FE. Fig. 56.

Enfin, l'on appelle *Zône de la Sphére, la partie de la Surface comprise entre deux Cercles paralleles, laquelle entoure la Sphére comme d'une ceinture.* Fig. 58.

Après avoir tracé cette notice générale de la nature & la formation de toutes les Figures ſolides que la Géométrie conſidére, il eſt tems d'entrer dans un examen plus approfondi de leur Surface, de leur Solidité & de leurs Rapports.

SECONDE SECTION.

Meſure de la Surface des Solides.

SI les Solides n'étoient environnés que de Surfaces planes, il ne ſeroit pas plus difficile de meſurer leur ſuperficie, que celle des Polygônes ordinaires, dont nous avons traité dans le Livre précédent. Mais trois Polyëdres, ſçavoir, le Cône, le Cylindre & la Sphére ſont enveloppés d'une Surface courbe, ſur la meſure de laquelle nous n'avons point encore établi de principes. D'ailleurs, il ne ſera pas inutile de chercher des voies abrégées pour évaluer & réduire à quelque Surface ſimple, cette multitude de Polygônes-plans qui bornent de toutes parts les autres Solides.



CHAPITRE

CHAPITRE PREMIER.

Mesure de la Surface des Prismes.

§. I.

Surface du Prisme droit.

I.

LE Prisme droit est environné de Parallélogrammes rectangles. Chacun d'eux a pour mesure le produit de sa Base par sa Hauteur. Mais la Hauteur est la même pour tous dans un Prisme droit; & la même que celle du Prisme. Donc on aura le total de la Surface de tous ces Parallélogrammes en multipliant toutes ces Bases linéaires, c'est-à-dire, le Périmétre entier de la Base du Prisme, par la Hauteur même de ce Solide.

En effet, le Prisme est composé de Tranches polygonales, égales & semblables à la Base; & le nombre de ces Tranches, quel qu'il puisse être, est déterminé par le nombre des Points contenus dans la Ligne de Hauteur perpendiculaire du Prisme. Ayant une Base quelconque, & une Ligne quelconque perpendiculaire sur ce Plan; si l'on fait mouvoir cette Base jusqu'au haut de la Ligne, le Prisme sera formé; sa Solidité, par le mouvement de toute la Base; &

sa Surface, par le mouvement du Périmétre.
Liv. III. II. Sect. Chap. I. §. I. Donc la Surface du Prisme n'est autre chose que le Périmétre de la Base pris autant de fois qu'il y a de Points dans la Ligne de Hauteur.

D'ailleurs, si l'on fait mouvoir une Ligne perpendiculaire le long du Périmétre d'un Polygône quelconque, il est évident que le mouvement de cette Ligne formera la Surface environnante d'un Prisme. Mais il est évident aussi que la Perpendiculaire est répétée autant de fois qu'il y a de Points dans le Périmétre de la Base. Donc *la Surface du Prisme droit est le produit du Périmétre de sa Base par la Ligne de sa Hauteur.* Donc *cette Surface est égale à un seul Rectangle, dont la Base seroit le Périmétre de la Base prismatisque étendu en une seule Ligne droite, & dont le Côté seroit la Hauteur même du Prisme.*

Fig. 62, 63. Le développement de la Surface du Prisme rend cette vérité sensible aux yeux. Tirez une Ligne droite indéfinie. A l'extrémité de cette Ligne élevez une Perpendiculaire égale à la Hauteur du Prisme. Par l'extrémité supérieure de cette Perpendiculaire menez une Parallele indéfinie à la Ligne inférieure. Appliquez ensuite sur ces deux Lignes la longueur des Côtés de la Base prismatique, & joignez les deux bouts par une Ligne droite: vous aurez la Surface de tous les Rectangles partiels qui environnent le Prisme. Pour completer la valeur de toute la Boëte prismatique, il ne s'agiroit que de joindre au grand Rectangle déja trouvé, la valeur des deux Bases, ou plutôt du double de l'une des

deux, puisqu'elles sont égales, ce qui n'est pas difficile.

Si le Prisme droit avoit pour Base un Polygône régulier, l'opération seroit encore plus facile. Pour avoir la valeur des Rectangles environnans, il suffiroit de multiplierle triple, le quadruple, le quintuple, &c. d'un des Côtés de la Base par la Ligne de Hauteur.

L'on auroit encore plus aisément la valeur de toute la Surface cubique. Car ce Solide étant contenu dans six Quarrés égaux, toute la Surface est égale à un Quarré sextuple de l'un d'entre eux; & ce Quarré sextuple n'est pas difficile à trouver.

2.

Fig. 64.

LA superficie du Cylindre droit ne donne pas plus d'embarras que celle des Prismes ordinaires. Les deux Bases sont connues. Il est aisé de les réduire à un seul Cercle; & l'on sçait comment il faut s'y prendre pour trouver à peu près le Rectangle égal au Polygône circulaire.

A l'égard de la superficie courbe du Cylindre, il est évident qu'elle est composée d'une infinité de Parallélogrammes rectangles infiniment étroits, dont les Bases sont les Côtés infiniment petits de la Base circulaire du Cylindre; & dont la Hauteur est la même que celle de ce Solide. Chacun de ces petits Rectangles a pour mesure le produit de sa Base par sa Hauteur. Donc l'amas de tous les Rectangles est égal au produit du total des Bases, c'est-à-dire, de la Circonférence de la Base cylindrique par la Hauteur de la Figure.

D'ailleurs il est manifeste que la Surface courbe du Cylindre est produite par le mouvement de la Circonférence de la Base, le long de la Ligne de Hauteur, ou bien par la révolution du Rectangle générateur de cette Figure. Or il résulte de la premiere construction, que l'on multiplie la Circonférence de la Base par la Ligne de Hauteur; & de la seconde, que l'on multiplie la Ligne de Hauteur par la Circonférence de la Base. Donc *la Surface courbe du Cylindre est égale au Rectangle qui auroit même Hauteur que le Cylindre; & pour Base une Ligne droite égale à la Circonférence de la Base.*

C'est ce que le développement de cette Surface présente sensiblement aux yeux. Si l'on fend legérement le Cylindre par le Côté perpendiculaire, & que l'on étende sur un Plan la Surface enlevée, on aura nécessairement le Rectangle que nous venons de désigner.

Lorsque le Cylindre droit a pour Hauteur le Diamétre de sa Base, on trouve tout d'un coup la valeur totale de la Boëte cylindrique. Car la Surface du Cercle est le Produit de la Circonférence par le quart du Diamétre. Donc la Circonférence multipliée par le Diamétre entier, donne un Cercle quadruple pour la Surface courbe du Cylindre : ajoutez-y les deux Cercles égaux, Bases du Cylindre, vous aurez pour la Surface totale un Cercle sextuple de la Base circulaire, que l'on peut réduire au Rectangle, autant qu'il est possible, par les voies proposées dans le Livre précédent.

§. II.

Surface des Prismes inclinés.

I.

LA Surface des Prismes inclinés n'est pas si facile à mesurer que celle des Prismes droits. Dans ceux-ci les Parallélogrammes environnans sont rectangles : leur Hauteur est la même que celle du Prisme : au lieu que dans les inclinés, les Parallélogrammes ne sont pas tous rectangles ; & leur Hauteur n'est pas celle du Prisme.

Donc pour avoir la Surface d'un Prisme incliné, il faut mesurer chacun des Parallélogrammes environnans en multipliant sa Base par sa Hauteur perpendiculaire. Je dis *sa Hauteur*, & non celle du Prisme ; & c'est à quoi il faut bien prendre garde. Car ces Parallélogrammes peuvent être Rectangles, quoiqu'inclinés sur la Base du Prisme ; & peuvent être inclinés, quoique perpendiculaires sur cette même Base. Fig. 63.

Si le Prisme est un Parallélipipéde, l'opération est plus simple. Car alors chaque Parallélogramme est égal à son opposé : les deux qui sont dans le sens de l'inclinaison du Prisme sont rectangles ; & les deux autres ont pour mesure le produit de leur Base par la Hauteur du Prisme. Fig. 65.

A l'égard des Bases, il est clair qu'elles ne différent pas des Bases du Prisme droit.

Liv. III. II. Sect. Chap. I. §. II.

Nous prouverons dans la Section suivante que le Prisme incliné est égal au Prisme droit de même Base & de même Hauteur. Mais cette égalité de Solidité ne conclut pas pour l'égalité de Surface. Il est évident au contraire que la Surface du Prisme incliné est plus considérable que celle du Prisme droit; & cela ne doit pas surprendre, puisque le Parallélogramme incliné est égal au Parallélogramme rectangle de même Base & de même Hauteur; quoique le Périmétre du premier soit plus grand que le Périmétre du second.

En vain l'on objecteroit que le nombre des Tranches prismatiques est le même dans l'un & l'autre Solide; & qu'ainsi puisque l'amas de ces Tranches forme de part & d'autre la même Solidité, l'amas des Périmétres doit aussi de part & d'autre former la même Surface.

Cette difficulté peut paroître insoluble aux partisans des Elémens indivisibles. Car si les Tranches prismatiques n'ont aucune Profondeur, les Lignes qui les bornent n'en auront pas davantage. Or en supposant même que de pareilles Lignes arrangées les unes auprès des autres sans intervalle puissent former une Surface, conçoit-on qu'un même nombre de ces Lignes fera des Surfaces plus ou moins grandes?

Mais la difficulté disparoît si l'on donne à nos Tranches une épaisseur infiniment petite. Car alors chaque Tranche sera un véritable Prisme de même nature que le Prisme total: droit, si celui-ci est droit: incliné, si celui-ci est incliné. Or dans la Tranche droite la coupe du bord est

perpendiculaire : elle est oblique, & par consé- Liv. III.
quent plus grande dans la Tranche inclinée, c'est- II. Sect.
à-dire, dans les deux sens de l'inclinaison. Et Chap. I.
c'est par cette raison que dans un Parallélipipéde §. II.
incliné, les deux Faces obliques sont plus grandes que dans un Parallélipipéde droit de même Base & de même Hauteur. Au lieu que les deux Faces latérales, quoiqu'obliques sur leur Base linéaire, sont égales aux Rectangles du Parallélipipéde droit, parcequ'elles sont Perpendiculaires sur la Base du Prisme.

Pour aider un peu l'imagination, prenez deux cartons de même épaisseur : coupez l'un par une section perpendiculaire, & l'autre par une section oblique : vous verrez que la section de celui-ci vous présentera une Surface plus grande que la section perpendiculaire, & d'autant plus grande, que la section sera plus oblique. Il faut raisonner de même sur nos Tranches prismatiques, quoique leur épaisseur soit infiniment petite.

Me dira-t'on que je ne fais qu'éluder l'objection; & qu'elle revient en son entier lorsqu'on considére que chacune de ces Tranches est elle-même composée d'une infinité d'autres du second ordre ? Je l'avoue. Mais je raisonnerai sur celles-ci comme sur les Tranches du premier ordre : sur celles du troisiéme, comme sur celles du second; & ainsi à l'infini, sans qu'on puisse me contraindre de m'arrêter à des Tranches totalement dépourvûes de Profondeur.

2.

Appliquons ces principes au Cylindre incliné. Fig. 66.
Il est manifeste que sa Surface courbe est plus

considérable que celle du Cylindre droit de même Base & de même Hauteur. Mais si l'on parvient à mesurer la Surface des Prismes ordinaires, il n'en est pas de même de la Surface du Cylindre incliné. Les plus habiles Géométres avouent que ce n'est que par des méthodes très-difficiles & très-compliquées que l'on arrive à l'approximation de sa valeur.

Pour comprendre la raison de cette différence, reprenons notre Parallélipipéde incliné. Les Tranches qui le composent sont coupées obliquement des deux côtés de l'inclinaison; mais la section oblique est uniforme dans toute sa longueur : & d'un autre côté, les mêmes Tranches sont coupées perpendiculairement sur les deux Faces latérales.

. Il n'en est pas de même dans le Cylindre oblique, à cause de sa forme circulaire. La section des Tranches est très-oblique dans les Parallélogrammes infiniment étroits *aA*, *bB*. Elle est Perpendiculaire dans les Parallélogrammes latéraux *cC*, *dD*. Aussi ces deux derniers Parallélogrammes sont égaux à ceux du Cylindre droit de même Base & de même Hauteur. Au lieu que les inclinés dans les quadratures sont plus grands. Mais entre les quadratures *aA*, *cC*, il y a une infinité de ces Parallélogrammes dont l'inclinaison diminue à mesure qu'ils approchent du Parallélogramme *cC*. La grandeur de leur Surface diminue donc en même Raison, & par conséquent l'Obliquité de la section des Tranches décroît par des Degrés infiniment petits du second ordre.

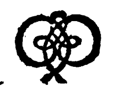
Arrivés à la quadrature cC, nous voyons les Parallélogrammes augmenter par les mêmes degrés jusqu'à la quadrature bB: diminuer ensuite jusqu'à la quadrature dD, & augmenter enfin de nouveau jusqu'à la quadrature *aA*. On comprend combien il est difficile d'évaluer des augmentations & des diminutions qui ne se font que par des degrés infiniment petits du second ordre.

CHAPITRE II.

Surface des Pyramides.

LA Base d'une Pyramide est un Polygône qui ne différe en rien de ceux qui peuvent être Base du Prisme. On sçait qu'il y en a toujours deux égales dans celui-ci, & que les Pyramides n'en ont qu'une. Ainsi, nous ne parlerons point de la Base en mesurant leur Surface. Il ne doit être question que de leurs Faces latérales.

On sçait encore que ces Faces sont des Triangles dont la Base est un Côté de la Base pyramidale, & dont le Sommet est le Sommet même de la Pyramide. Il s'agit d'évaluer le total de ces Triangles, tant dans la Pyramide que dans le Cône.



LIV. III.
II. SECT.
CHAP. II.
§. I.

§. I.

Pyramides polygonales.

LOrsque la Base d'une Pyramide droite est un Polygône régulier, toutes les Faces triangulaires sont égales, puisqu'elles ont même Base & même Hauteur. Il suffit donc de connoître l'un des Côtés de la Base pyramidale, de le tripler, le quadrupler, &c. selon la nature du Polygône, & ensuite de multiplier cette Ligne triple ou quadruple, &c. par la moitié de la Hauteur de l'un des Triangles environnans; & l'on aura la Surface de la Pyramide.

Fig. 67.

Quand même la Base d'une Pyramide droite seroit un Polygône irrégulier, cela ne changeroit rien à la mesure, quoique les Triangles environnans n'eussent pas la même Base linéaire. Car ayant même Hauteur, on auroit toujours la Surface totale des Triangles en multipliant cette Hauteur par la moitié du Périmétre de la Base, ou le Périmétre entier par la moitié de la Hauteur.

J'avertis ici qu'il ne faut pas confondre la Hauteur des Triangles environnans avec la Hauteur de la Pyramide. Celle-ci est mesurée par une Perpendiculaire tirée du Sommet sur le Plan de la Base : au lieu que la Hauteur des Faces triangulaires est une Perpendiculaire tirée du Sommet de la Pyramide sur un des Côtés du Polygône qui lui sert de Base.

Dans les Pyramides inclinées, la Hauteur des Triangles environnans n'est pas la même ; & par conséquent pour en avoir la valeur, il faut se donner la peine de les mesurer l'un après l'autre.

Fig. 68. Fig. 45.

Lorsque la Pyramide droite est tronquée par un Plan parallele à la Base, elle est environnée, non plus de Triangles, mais de Trapèzes, qui, comme je l'ai dit, ne sont que des Triangles tronqués. Il ne sera pas plus difficile d'évaluer ces Polygônes que d'évaluer des Triangles. Il faut seulement observer, que la Pyramide en ce cas auroit deux Bases, & que la supérieure seroit semblable à l'inférieure, mais plus petite.

Nous avons dit au commencement de ce Livre, que la Pyramide étoit un Triangle solide, & le Prisme aussi un Parallélogramme solide. Et cette ressemblance assez visible en elle-même, devient encore plus frappante, lorsque l'on se borne à comparer leur Surface environnante. En effet, le Prisme est environné de Faces parallélogrammes, comme la Pyramide de Faces triangulaires. On pourroit donc s'imaginer que la Surface de la Pyramide seroit moitié de celle du Prisme de même Base & de même Hauteur, comme la Surface du Triangle est moitié du Parallélogramme. On diroit donc : le Prisme a deux Bases égales: la Pyramide n'en a qu'une. Donc à cet égard la Surface du Prisme est double de la Surface de la Pyramide. D'un autre côté, la Pyramide a autant de Triangles environnans, que le Prisme a de Parallélogrammes. (Car je suppose que les Bases de notre Prisme & de notre Pyramide sont égales & semblables)

Les Triangles & les Parallélogrammes ont la même Baſe linéaire : les deux Solides ont la même Hauteur. Donc chaque Parallélogramme eſt double de chaque Triangle. Donc la Surface totale du Priſme eſt double de la Surface totale de la Pyramide de même Baſe & de même Hauteur.

Mais ce raiſonnement n'eſt qu'un ſophiſme; car on y confond la Hauteur de la Pyramide, avec la Hauteur des Triangles environnans. Or celle-ci eſt plus conſidérable, parceque ces Triangles ſont inclinés ſur la Baſe de la Pyramide. Donc leur Hauteur eſt plus grande que celle des Parallélogrammes du Priſme, puiſque la Hauteur du Priſme & celle de ſes Parallélogrammes eſt abſolument la même. Je ne compare ici, comme l'on voit, que la Pyramide droite avec le Priſme droit.

Pour que la Surface priſmatique fût double de la pyramidale, il faudroit que le Priſme eut la Hauteur, non de la Pyramide, mais de ſes Triangles environnans. Donc en ſuppoſant la même Hauteur dans les deux Solides, *la Surface de la Pyramide ſera toujours plus de la moitié de celle du Priſme.*

On ne peut apprétier cet excédent, parcequ'il eſt variable du côté de la Pyramide. Ayant une Baſe quelconque d'un Priſme droit, il eſt certain que la Hauteur du Solide ſera la même que celle des Parallélogrammes environnans. Ce n'eſt pas la même choſe dans la Pyramide. Car ayant une Baſe quelconque, plus on élevera le Sommet, & moins les Triangles environnans ſeront incli-

nés sur la Base; & moins par conséquent leur Hauteur différera de celle de la Pyramide. Au contraire moins on élevera le Sommet, & plus les Triangles environnans seront inclinés sur la Base; & plus par conséquent il y aura de différence entre leur Hauteur & celle de la Pyramide. Ainsi, pour que la Surface de la Pyramide fût la moitié de celle du Prisme de même Base & de même Hauteur, il faudroit supposer que ces deux Solides eussent une élévation infiniment grande. Car alors il n'y auroit qu'une différence infiniment petite entre la Hauteur de la Pyramide & celle de ses Triangles environnans.

§. II.

Pyramide circulaire, ou Cône.

LA Surface du Cône droit n'est pas plus difficile à mesurer que celle de la Pyramide. Car le Cône est environné de Triangles infiniment étroits, dont la Base est dans la Circonférence de la Base conique, & dont les Sommets forment celui du Cône. Fig. 69.

Tous ces Triangles ont pour mesure leur Base multipliée par la moitié, non de la Hauteur du Cône, mais de leur Hauteur propre, c'est-à-dire, par la moitié du Côté du Cône. Donc la Surface du total de ces Triangles est le produit de la Circonférence de la Base conique par la moitié du Côté du Cône, ou du Côté entier par la moitié de la Circonférence.

Nous parviendrons au même but en suivant Fig. 72.

la formation du Cône par la révolution du Triangle Générateur autour de l'Axe SC. Il est clair que par le moyen de cette révolution, la Surface conique est produite par l'Oblique SA, pendant que les Perpendiculaires sur l'Axe AC, &c. décrivent toutes les Couches circulaires dont le Cône est composé. Il faut donc prendre l'Oblique SA autant de fois qu'elle fait de pas. Mais prenons garde ici à nous méprendre. Car le mouvement de cette Ligne attachée fixement en S, est beaucoup plus lent du Côté du Sommet, que du Côté de la Base. L'Oblique SA employe le même tems à décrire la petite Circonférence dont HK est le Raïon, qu'à décrire la grande Circonférence, Base du Cône. Par laquelle des Circonférences circulaires faut-il donc multiplier le Côté SA? Sera-ce par la Circonférence de la grande Base? Sera-ce par une petite Circonférence prise au hazard près du Sommet comme celle dont HK est le Raïon; ou par le Point même qui fait le Sommet du Cône, & qu'on peut regarder comme un Cercle infiniment petit? Mais le premier produit seroit trop grand, & le second ne le seroit pas assez. Il faut donc tenir le milieu, & prendre pour second Produisant la Circonférence située également entre le Sommet & la Base, c'est-à-dire, celle qui seroit décrite par le Raïon PQ.

Cette mesure est absolument la même que celle que nous avions trouvée d'abord. Car la Circonférence dont PQ est le Raïon est précisément moitié de la Circonférence de la grande Base. Pour le prouver, rappellons-nous que les

Circonférences sont entre elles comme leurs Raïons. Le Raïon AC est double du Raïon PQ. Car AC étant paralléle à PQ, le grand Triangle ASC est semblable au petit PSQ; & par conséquent leurs Côtés homologues sont proportionels. Donc AC est à PQ, comme SA est à SP. Or par la supposition SA est double de SP. Donc AC est double de PQ. Donc la Circonférence de la Base AC est double de la Circonférence mitoyenne PQ.

Fig. 69.

Le développement de la Surface conique nous rendra sensible la bonté des deux démonstrations précédentes. Supposons que l'on fende legérement le Cône OAB dans la direction du Côté OA; & qu'après avoir enlevé cette superficie, on l'étende sur un Plan : elle sera le Secteur OABA; & la Circonférence de la Base AB se trouvera transformée en Arc d'un autre Cercle, dont le Côté conique OA est le Raïon.

Je dis que cette Figure est un Secteur. Car le Point O où tous les Côtés du Cône sont réunis est à distance égale de tous les Points de la Courbe ABA; puisque tous les Côtés du Cône sont égaux. Donc la Courbe ABA est une Courbe circulaire.

Or la mesure de ce Secteur est le produit de l'Arc par la moitié du Raïon, ou du Raïon par la moitié de l'Arc. Et voilà la confirmation de la premiere preuve.

Pour avoir la confirmation de la seconde, du Point O pris pour Centre & de l'intervalle OP moitié de OA, décrivez dans la Surface conique développée l'Arc PQP. Cet Arc qui sera la transf-

Liv. III. II. Sect. Chap. II. §. II.

formation de la Circonférence circulaire PQ dans le Cône, est moitié du grand Arc ABA. Car les Circonférences & les Arcs de même nombre de Degrés sont comme les Raïons. Or le Raïon OA est double du Raïon OP. Donc l'Arc ABA est double de l'Arc PQP. Donc pour avoir la Surface du Secteur OABA, il est égal de multiplier le Raïon OA par la moitié de l'Arc ABA, ou par l'Arc entier PQP.

Observons que le Secteur seroit égal à un Triangle rectiligne rectangle dont la Base seroit l'Arc ABA rectifié, & dont le Côté perpendiculaire seroit le Raïon de l'Arc. Si dans ce Triangle on tire la Ligne PQP parallele à la Base, ensorte que le Point P soit à égale distance de O & de A, cette Ligne sera l'Arc PQP rectifié.

Par le moyen de cette Parallele, on a deux Triangles semblables OAA, OPP, dont les Côtés homologues sont proportionnels. Par conséquent, la grande Base ABA est à la petite Base PQP, comme le grand Côté OA est au petit Côté OP. Or OA est double de OP. Donc ABA est double de PQP. Donc pour avoir la Surface du Triangle égal au Secteur & à la Surface conique, il est indifférent de multiplier le Côté OA par la moitié de la grande Base ABA, ou par la petite Base entiere PQP.

Fig. 70. De la Surface conique passons à celle du Cône tronqué. Je suppose que ce soit par un Plan parallele à la Base, & par conséquent que la Base supérieure soit un Cercle plus petit que la Base inférieure.

Le

Le Cône en cet état n'est plus environné de Triangles, mais de Trapèzes infiniment étroits, égaux en hauteur, & dont les Bases sont dans la Circonférence des deux Bases du Solide. Chacun de ces Trapèzes a pour mesure le produit de Hauteur, c'est-à-dire, le Côté du Cône tronqué, par une Moyenne arithmétique entre ses deux Bases. Donc la valeur de tous ces Trapèzes est le produit de la Ligne *aA*, Côté du Cône tronqué, par la Circonférence *mn* mitoyenne entre les Circonférences des deux Bases du Cône tronqué. Car toutes les Bases moyennes des Trapèzes environnans se trouvent dans la Circonférence mitoyenne *mn*.

En effet, la Surface du Cône tronqué est formée par le mouvement de l'Oblique *a*A autour de la Circonférence des deux Bases. Mais le Point *a* allant plus lentement autour de la Base *ab*, que le Point A autour de la Base AB, il est clair que le produit du Côté *a*A par la Circonférence de la Base supérieure seroit trop petit; & qu'il seroit trop grand par la Circonférence de la Base inférieure. Donc pour avoir un produit exact, il faut multiplier le Côté *a*A par une Circonférence *mn* qui tienne le juste milieu entre les deux Bases.

Le développement de la Surface du Cône tronqué nous met sous les yeux la justesse de cette mesure. Car cette Surface étendue sur un Plan nous présente une espéce de Trapèze dont les deux Côtés paralleles sont deux Arcs de Cercle concentriques de même nombre de Degrés. En effet, si le Secteur entier OABA contient la Surface du Cône entier, pour en ôter la Surface du

petit Cône *Oab*, il faut en retrancher le Secteur *Oaba*. Il reste donc pour la Surface du Cône tronqué une portion de Couronne circulaire *aba*, ABA, laquelle est une espéce de Trapèze.

Or la valeur de cette portion de Couronne ou de ce Trapèze est le produit de la Hauteur *a*A, par un Arc concentrique, mitoyen & parallele aux deux Bases, comme on l'a prouvé dans le Livre précédent.

Enfin, le Secteur entier OABA est égal au Triangle rectiligne qui auroit pour Base une Ligne droite égale à l'Arc ABA, & pour Hauteur le Raïon OA. Si l'on prend sur OA la partie *oa* égale au Côté du petit Cône retranché; & que par ce Point *a* on tire *aba* Parallele à la Base, cette Ligne sera égale à l'Arc *aba* du Secteur. Le reste du Triangle, c'est-à-dire, le Trapèze *a*AA*a*, exprime donc la Surface de la portion de Couronne circulaire ou du Cône tronqué.

Or la valeur de ce Trapèze rectiligne est le produit de la Hauteur *a*A par une Ligne *mmm* moyenne arithmétique entre les deux Bases. Donc la Surface du Cône tronqué est le produit de son Côté *a*A, par la Circonférence d'une Base mitoyenne entre les deux Bases du Solide. Car si la Ligne droite *aba* exprime la petite Circonférence *aba*; & si la droite ABA exprime la grande Circonférence ABA, la Ligne moyenne *mmm* exprimera la Circonférence moyenne *mmm*.

On va voir bien-tôt de quelle importance il est de se bien mettre dans l'esprit cette mesure du Cône tronqué. C'est pour cette raison que

je m'y suis étendu peut-être plus que le sujet en lui-même ne le méritoit.

J'ai toujours supposé que la Section du Cône tronqué étoit parallele à la Base; & par conséquent un Cercle. Si la Section étoit une Ellypse, le Cône tronqué seroit environné, non de Trapèzes égaux, mais d'une infinité de Quadrilatères irréguliers; & l'on sent aisément que la Géométrie ordinaire ne peut fournir des méthodes pour évaluer une Surface composée de pareilles Figures, dont la variabilité est infinie; parceque la Section ellyptique peut s'éloigner ou s'approcher à l'infini de la Section circulaire.

Par la même raison, je ne parle point de la Surface des Cônes inclinés. S'il est si difficile de trouver la Surface du Cylindre oblique, même par approximation, celle du Cône incliné doit présenter des difficultés plus insurmontables encore.

Mais en se bornant au Cône droit, il ne sera pas inutile d'en comparer la Surface avec celle du Cylindre droit de même Base & de même Hauteur. Le Cône est au Cylindre ce que la Pyramide est au Prisme. Si donc la Surface Pyramidale est un peu plus de la moitié de la Surface prismatique, il faut dire que la Surface conique est dans le même rapport avec la Surface cylindrique.

En effet, sans parler des Bases, à l'égard desquelles le Cylindre est double du Cône, la Surface du premier est le produit de la Circonférence de sa Base par sa Hauteur; & la Surface du Cône est le produit de la demi-Circonférence

d'une Base égale par le Côté du Cône. Mais le Côté du Cône étant oblique sur la Base, est plus grand que la Hauteur du Cône & du Cylindre. Par conséquent, la Surface conique est plus de la moitié de la Surface cylindrique.

Il faut ajouter, comme on l'a déja dit à l'égard de la Pyramide, que cet excédent diminue à mesure qu'on donne plus de Hauteur aux deux Solides que l'on compare ; & qu'il s'évanouiroit en quelque sorte, en supposant que le Cylindre & le Cône auroient une Hauteur infinie. Car alors il n'y auroit qu'une différence infiniment petite entre le Côté du Cône & sa Hauteur perpendiculaire.

CHAPITRE III.

Surface des Polyëdres à facetes.

Fig. 50, 51, &c.

LA Surface des Polyëdres à facetes ne présente aucune difficulté considérable. S'ils sont réguliers, il suffit de mesurer une des Faces, & d'en répéter la valeur autant de fois qu'il y en a sur le Polyëdre. Il est même facile de les réduire toutes en une seule Figure de même espéce ; de faire, par exemple, un Triangle équilatéral quadruple ou octuple, ou vingt fois plus grand qu'un Triangle donné, pour avoir dans un seul Triangle la Surface du Tétraëdre, de l'Octaëdre, & de l'Icosaëdre : Et de même un Quarré sextuple, & un Pentagône

dodécuple qui contiendront la superficie de l'Exaëdre & du Dodécaëdre.

A l'égard des Polyëdres à facetes irrégulieres, il est clair qu'il faut mesurer séparément toutes les Faces inégales, & faire une Somme totale de superficie. Cet article ne mérite pas de nous arrêter davantage. Passons à quelque chose de plus intéressant.

CHAPITRE IV.

Surface de la Sphére.

IL n'y a guères de Surface plus difficile à mesurer que celle de la Sphére. En vain tâcheroit-on d'en découvrir les Produisans à force de la considérer en elle même. Il faut nécessairement la rapprocher de quelque autre Surface courbe plus connue.

Après beaucoup de tentatives, les Géométres sont parvenus à démontrer par des preuves assez compliquées, que la Surface de la Sphére est égale à la Surface courbe du *Cylindre circonscrit.* On donne ce nom au Cylindre dans lequel la Sphére seroit contenue si exactement, qu'elle ne le déborderoit en aucun sens. Ce Cylindre auroit pour Base un grand Cercle de la Sphére; & pour Hauteur, l'Axe ou le Diamétre de la même Sphére.

Je ferai usage de ces démonstrations. Mais quelque force qu'elles aient en effet, il faut avouer qu'elles laissent dans l'esprit une difficulté

frappante, sur laquelle elles répandent peu de lumiere. Il est certain, dira-t'on, qu'il n'y a pas plus de Tranches circulaires dans le Globe que dans le Cylindre circonscrit. Le nombre des unes & des autres est déterminé par l'Axe du Globe, lequel est en même tems Hauteur du Cylindre. Dans l'un & dans l'autre Solide, la Surface est formée par les Circonférences du même nombre de Tranches. Mais dans le Cylindre, toutes les Circonférences sont de la même grandeur; au lieu que dans le Globe, à l'exception du grand Cercle égal aux Tranches cylindriques, tous les autres vont en diminuant, & deviennent presque imperceptibles vers les Pôles. Or il est inconcevable qu'un amas de petites Circonférences forme une Surface aussi grande qu'un même nombre de grandes Circonférences toutes égales. Donc, conclura-t'on, la Surface courbe du Cylindre circonscrit doit être plus grande que celle de la Sphére.

Je sçais que ce raisonnement n'est qu'une difficulté. Mais elle est pressante; & l'on ne peut trop se hâter de la résoudre. La voie que je vais prendre pour établir la proposition qu'il s'agit de prouver, dissipera, comme je l'espere, toute ombre de doute; & quand elle laisseroit encore quelque chose à désirer, elle préparera du moins l'esprit à recevoir sans répugnance des démonstrations plus rigoureuses.

Nous avons vu que la Circonférence du demi-Cercle générateur formoit la Surface de la Sphére par son mouvement autour de l'Axe; pendant que le Plan du même demi-Cercle

en formoit la Solidité. Puis donc que la Surface de la Sphére n'est autre chose que la Circonférence du demi-Cercle générateur répétée continuellement depuis le lieu d'où elle part jusqu'à ce qu'elle y soit revenue, c'est par la connoissance exacte de cette Courbe & de sa révolution autour de l'Axe, que nous pouvons parvenir à connoître la Surface du Globe qui en est le résultat.

Pour cela supposons que de tous les Points de l'Axe AB, on éleve des Perpendiculaires terminées à la demi-Circonférence ADB : la superficie du demi-Cercle en sera couverte sans vuide. Si l'on fait tourner le demi-Cercle autour de l'Axe, il est évident 1°. que les Perpendiculaires paralleles formeront par leur mouvement la Solidité de la Sphére. 2°. Que chacune d'elles tracera un Cercle dont elle est le Raïon. 3°. Que le plus grand de ces Cercles sera décrit par la Ligne CD Raïon du demi-Cercle; & que les autres iront en diminuant en en-haut & en enbas, jusqu'à ce qu'ils se confondent avec les Pôles A & B. 4°. Enfin que l'extrémité de ces Perpendiculaires qui s'identifient avec la demi-Circonférence formeront la Surface de la Sphére. Fig. 71.

Observons avec soin que ces Perpendiculaires paralleles couvrent d'un côté tout l'Axe AB; & de l'autre toute la demi-Circonférence ADB. De sorte que l'Axe pourra être regardé comme une suite des extrémités des Perpendiculaires, pendant que la demi-Circonférence sera aussi une suite des extrémités opposées des mêmes Lignes. Cependant la demi-Circonférence ADB

eſt plus grande que l'Axe AB de plus d'un tiers. Car la Circonférence du Cercle étant au Diamétre, au moins comme* 3 eſt à 1, ou comme 6 eſt à 2, la demi-Circonférence ſera au même Diamétre, au moins comme 3 eſt à 2.

Il paroît fort ſingulier qu'un amas de Lignes placées les unes à côté des autres ſans intervalle, forment par leurs extrémités d'un côté une Ligne droite, & de l'autre une Ligne courbe d'une plus grande étendue. Et cela ſeroit inconcevable, ſi ces Lignes élémentaires n'avoient aucune Largeur. Car un amas d'un même nombre de Points indiviſibles, tels que ſeroient leurs extrémités, ne pourroit former qu'une étendue égale, ſi tant eſt qu'il en pût former quelqu'une. Puis donc que ces extrémités forment des étendues ſi différentes, comme on n'en peut douter, il faut conclure que les Lignes élémentaires ont une Largeur réelle, quoiqu'infiniment petite.

Mais dès-lors tout s'applanit. Nos Perpendiculaires ſur l'Axe forment une Ligne droite d'un côté, parceque chacune d'elles touche l'Axe par une ſection perpendiculaire. Mais elles aboutiſſent ſur la demi-Circonférence par une ſection oblique priſe dans leur épaiſſeur, & plus grande par conſéquent que la ſection perpendiculaire qui les termine par l'autre extrémité. D'où il réſulte que chacune de ces Lignes tournant autour de ſon Centre placé dans l'Axe, décrira par ſa ſection oblique dans ſon mouvement de rotation, non la Surface d'une Tranche cylindrique, mais la Surface d'une Tranche conique,

c'est-à-dire, d'un Cône tronqué infiniment mince.

Ce rapport que nous appercevons déja entre la Surface du Cône & celle de la Sphére, mérite d'être approfondi, pour mieux saisir l'analogie qu'elles ont entr'elles, & pour en remarquer les différences.

LIV. III. II. SECT. CHAP. IV.

Reprenons donc le Triangle générateur du Cône; & supposons que sur tous les Points de l'Axe SC, on ait élevé des Perpendiculaires terminées obliquement dans le Côté SA. Ce Côté du Cône est une Ligne plus longue que l'Axe. Par conséquent, les Perpendiculaires sur l'Axe, qui ne le coupent qu'en un seul Point, coupent en plus d'un Point le Côté oblique SA; ce qui ne se peut faire, qu'en supposant que chacune de ces Perpendiculaires est terminée sur l'Axe par une section perpendiculaire, & sur le Côté SA, par une section oblique prise dans l'épaisseur de la Ligne, & plus grande que la section perpendiculaire. Il faut donc concevoir chacune de ces sections obliques comme le Côté d'un Cône tronqué infiniment mince, c'est-à-dire, comme le Côté d'une de ces Tranches dont nous avons dit que le Cône étoit composé.

Fig. 72.

Mais comme SA Côté du Cône entier, est uniforme dans son Obliquité, nos petites Obliques seront aussi toutes égales, & formeront par leur révolution autour de l'Axe de petites Surfaces coniques, dont le Côté sera égal, quoiqu'inégalement distant du Centre de leur rotation. Ainsi, ces petites Surfaces diminueront dans leur contour, à mesure qu'elles s'éleveront & qu'elles approcheront du Sommet.

Liv. III. II. Sect. Chap. IV. Fig. 71.

Il n'en est pas tout-à-fait ainsi dans le demi-Cercle générateur. La demi-Circonférence ADB n'est pas une Oblique uniforme, mais une Courbe composée de Points qui changent perpétuellement de Direction. Et ces Points qui d'abord se rapprochent fort peu de l'Axe AB, paroissent s'y précipiter vers la fin de leur course. Car la marche de la Courbe circulaire uniforme dans la Direction du Centre du Cercle, ne l'est pas dans la Direction des Points centraux des petits Cercles placés dans l'Axe. Et de-là vient que la Courbe circulaire qui paroît presque parallele à l'Axe à droite & à gauche du Point D également distant des Pôles, tombe presque à plomb sur ces mêmes Pôles, lorsqu'elle s'en approche. D'où il faut conclure que nos Perpendiculaires sur l'Axe ne coupent pas toutes une égale portion d'étendue dans la Courbe ADB.

Ne considérons que le quart de Cercle ADC; ce que nous y verrons regarde également l'autre quart de Cercle DBC. Au Point-milieu du Raïon CA élevons une Perpendiculaire FE. Cette Ligne qui partage le Raïon CA en deux parties égales, ne partage pas de même l'Arc DEA. Il est visible au contraire que la partie EA est considérablement plus grande que la partie DE. Cependant le demi-Raïon CF a soutenu autant de Perpendiculaires, que le demi-Raïon FA en soutiendra. (a) Donc l'extrémité des Perpendiculaires couvrira plus d'espace dans l'Arc EA, qu'un

(a) Pour ne pas interrompre le fil du discours, je me contente ici du témoignage des yeux. Mais il est aisé de prouver géométriquement que l'Arc EA est plus grand, & même par

égal nombre de Perpendiculaires n'en a couvert dans l'Arc DE. Donc les sections obliques qui terminent les Perpendiculaires dans la Courbe DA n'ont pas la même Obliquité ni la même grandeur ; & sont au contraire d'autant plus obliques & d'autant plus grandes, que la Courbe DA s'approche davantage du Pôle A. Donc enfin les Surfaces de Cônes tronqués, qu'elles formeroient par leur révolution autour de l'Axe, ne pourroient composer un seul & même Cône, mais seroient des commencemens de Cônes différens les uns des autres.

Voyons maintenant ce qui doit résulter de la révolution de tous ces Côtés de Cônes.

1°. Le Raion CD également éloigné des deux Pôles de l'Axe, ne peut couper qu'un seul Point dans la demi-Circonférence. Par conséquent, le Point D doit être considéré comme un Quarré

fois plus grand que l'Arc DE. Pour le démontrer soit tiré le Raion CE, & une Corde EA. Ces deux Lignes sont égales. Car étant également éloignées de la Perpendiculaire EF qui partage le Raion CA en deux parties égales, elles ont la même Obliquité sur ce Raion CA en partant du même Point E. D'un autre côté le Raion CE est égal au Raion CA. Donc le Triangle ECA est équilatéral. Donc l'Angle ECA est de 60 Degrés. Donc l'Arc EA mesure de cet Angle est aussi de 60 Degrés. Donc l'Arc ED son Complément n'est que de 30. Fig. 71.

On pourroit encore prouver qu'une Perpendiculaire élevée au milieu du demi-Raion FA au Point H partageroit en deux parties très-inégales au Point G, l'Arc total EA ; & que l'Arc partiel GA seroit beaucoup plus grand que l'autre partie BG. D'où il suivroit que les trois quarts de nos Perpendiculaires sur le Raion CA n'ont guères couvert que la moitié de l'Arc DA ; & que le dernier quart de ces Perpendiculaires couvrira un Arc de 45 Degrés. Mais il est inutile d'entrer dans ce détail. Ce que nous avons dit suffit pour faire comprendre, que chaque Perpendiculaire sur le Raion CA coupe une partie d'autant plus grande dans le quart de Circonférence DA, que la Perpendiculaire est plus proche du Pôle.

Liv. III. II. Sect. Chap. IV.

infiniment petit, égal aux Elemens de la Perpendiculaire CD. Son extrémité en D sera donc le Côté perpendiculaire d'un Quarré, & non pas une oblique. Donc si l'on fait tourner circulairement le Raïon CD, il décrira, non un Cône tronqué, mais un Cylindre infiniment mince.

Pour avoir la Surface courbe de ce Cylindre, il faut le concevoir composé d'une infinité de Tranches circulaires du second ordre. Ses Produisans seront donc la Circonférence de sa Base, & sa Hauteur perpendiculaire.

2°. Le Raïon, qui suit immédiatement CD doit être aussi conçu comme composé d'une infinité de Tranches circulaires du second ordre; mais inégales à mesure qu'elles s'éloignent de la Tranche CD. Car le Point qui suit D dans la demi-Circonférence est coupé dans son épaisseur par une section un peu oblique; & par conséquent présente une petite Ligne plus grande que la Hauteur perpendiculaire du Point D. Aussi ce second Raïon, en circulant autour de l'Axe, doit former un Cône tronqué dont le Côté est presque perpendiculaire.

Pour avoir la Surface courbe de ce Cône, il faut multiplier, non la Circonférence de sa Base inférieure, ni celle de la Base supérieure, mais la Circonférence de la Tranche mitoyenne du second ordre, par le Côté oblique. Cette Circonférence mitoyenne est tant soit peu plus petite que celle d'une des Tranches du Cylindre précédent. Mais aussi le Côté oblique est tant soit peu plus grand que le Côté du Cylindre DC.

Ainsi ce que la Surface du Cône tronqué perd dans un de ses Produisans, elle le regagne dans l'autre. On a donc tout lieu de croire que la Surface de ce Cône est égale à la Surface courbe du Cylindre CD.

3°. On doit faire le même raisonnement par rapport aux Raïons suivans qui diminuent peu à peu de longueur; mais aussi qui sont terminés dans la Circonférence du demi-Cercle par des Obliques toujours un peu plus longues que celle qui termine le Raïon précédent.

Cette diminution n'est pas fort considérable jusqu'au Raïon perpendiculaire EF placé sur le milieu du demi-Axe CA. Car la moitié des Perpendiculaires qui sont épuisées, n'ont coupé dans l'Arc DA que la partie DE plus petite de moitié que la partie EA reste de l'Arc. Aussi les petites Obliques qui terminent ces Perpendiculaires depuis D jusqu'en E, n'ont reçu que très-peu d'augmentation. Mais la partie d'Arc depuis E jusqu'en A tendant à se précipiter vers le Pôle, l'autre moitié des Raïons perpendiculaires diminue plus sensiblement de longueur à mesure qu'ils approchent du bout du demi-Axe CA. Aussi leur extrémité opposée coupant un plus grand espace dans la Circonférence du demi-Cercle, est terminée par une Oblique qui s'allonge à proportion que le Raïon diminue de longueur.

4°. La derniere Perpendiculaire placée sur le Côté du Pôle A est d'une extrême petitesse. Comme ce même Côté de A est entierement frappé par le Point voisin de la Courbe circu-

laire; notre Perpendiculaire entre dans ce Point, en couvre la plus grande partie vers l'extérieur, couvre un peu moins du Point qui précéde dans la Courbe; & ainsi de Point en Point, jusqu'à celui dont la Perpendiculaire ne retranchera qu'un infiniment petit du second ordre.

L'Oblique qui termine d'un côté cette Perpendiculaire, est proprement une Diagonale, qui traverseroit une Ligne pareille d'une Largeur uniforme dans toute son étendue. De sorte que cette derniere Perpendiculaire a la forme d'un Triangle rectangle.

Si l'on fait circuler ce Triangle, & le Point A sur lui-même, on aura un Cône tronqué dont la Base supérieure n'aura pour Diamétre que la Largeur du Point A; pour Hauteur que la Longueur du même Point A, & dont le Côté oblique sera extrêmement grand, eu égard à ses autres Dimensions. Il n'est donc pas étonnant que la Circonférence mitoyenne du second ordre multipliée par le Côté de ce Cône tronqué, forme une Surface courbe égale à celle de la Tranche cylindrique CD. Donc toutes les Tranches dont la Sphére est composée ont une égale Surface. Or le nombre de ces Tranches est déterminé par le nombre des Points contenus dans l'Axe AB. Donc la Surface de la Sphére, résultat de toutes ces petites Surfaces, est égale à la Surface courbe du Cylindre circonscrit.

Fig. 75, 76. Pour rendre sensible cette derniere conclusion, supposons une Sphére inscrite dans un pareil Cylindre, ou, si l'on veut, le demi-Cercle générateur de la Sphére dans le Rectangle gé-

nérateur du Cylindre. Le grand Cercle de [redacted] Sphère dont le Raion est CD, sera confondu avec un Cercle du Cylindre placé dans le milieu de sa Hauteur : le Pôle A sera le Centre de la Base supérieure ; & le Pôle B, de la Base inférieure. Le nombre des Cercles égaux dont le Cylindre est composé, est le même que celui des Points contenus dans l'Axe AB, Hauteur du Cylindre : le Cylindre aura donc autant de Cercles paralleles, que le Globe a de Tranches paralleles. Or la Surface courbe de chaque Tranche parallele du Globe est égale à celle du Cercle CD commun au Globe & au Cylindre. Donc la Surface de chaque Tranche du Globe est égale à celle du Cylindre qui lui correspond. Donc toute la Surface du Globe est égale à la Surface courbe du Cylindre.

LIV. III. II. SECT. CHAP. IV.

Cette preuve a le double avantage, d'établir la proposition qu'il s'agit de démontrer, & de réfuter si parfaitement la difficulté qui d'abord paroissoit assez redoutable, qu'il est impossible que dorénavant elle répande le plus petit nuage.

Mais des personnes difficiles en démonstrations géométriques, pourroient être frappées d'une autre objection. On dira que notre preuve paroît, il est vrai, fondée sur une analogie naturelle. On avouera que les Perpendiculaires sur l'Axe dans le demi-Cercle générateur, se terminent à l'Arc par une Oblique qui devient d'autant plus grande, qu'elle approche du Pôle, en même tems que les Perpendiculaires diminuent de longueur. Mais est-il bien sûr que la

Fig. 71.

[redacted] diminution des Raïons perpendiculaires, soit en même Raison que l'augmentation des Côtés obliques ? & que cette Raison se conserve toujours la même depuis le Point D jusqu'au Pôle A ?

Pour rendre l'objection plus pressante, il faut considérer que la Surface cylindrique formée par la révolution du Point D, est le produit de la Circonférence d'une Tranche du second ordre par la Hauteur du même Point D ; & que la Surface conique formée par la révolution de la seconde Perpendiculaire qui touche le Raïon CD est le produit de la Circonférence d'une Base mitoyenne du second ordre par le Côté oblique de ce petit Cône tronqué. Mais pour que cette Surface conique fût égale à la Surface cylindrique, il faudroit que les deux Produisans de l'une fussent réciproques aux deux Produisans de l'autre, c'est-à-dire, que la Circonférence de la Base du petit Cylindre fût à la Circonférence mitoyenne du Cône tronqué, comme le Côté de ce même Cône est à la Hauteur du Cylindre. Or cette Proportion, quelque vraisemblable qu'elle soit, n'est pas démontrée en rigueur dans la preuve qu'on vient de lire.

Telle est l'objection. J'en reconnois toute la force ; & qui plus est, je ne tenterai pas d'y répondre. La Métaphysique de l'Etendue qui me conduit aux Elémens infiniment petits du second ordre, ne m'apprend point à les calculer en rigueur. Je me contente de la grande vraisemblance que l'on m'accorde ; elle suffit pleinement pour donner une idée nette de la Courbe génératrice

ratrice

ratrice de la Surface ſphérique, & pour diſſiper l'apparence de paradoxe que préſente l'égalité de cette Surface avec celle du Cylindre.

Pour ſuppléer néanmoins à ce qui peut manquer à ma preuve, j'aurai recours à celle que les Géométres ont coutume de donner, & qui pourra paroître plus démonſtrative. La mienne n'y ſervira, ſi l'on veut, que de préparation; mais enfin elles ſe ſoutiendront mutuellement, & il en réſultera dans l'eſprit des Lecteurs une conviction plus parfaite & plus entiere.

Sur un Point pris à volonté dans la demi-Circonférence ADB ſoit menée une Tangente RS, dont les deux derniers Points R & S ſoient également éloignés du Point de contingence H. A l'extrémité du Raïon CD ſoit élevée une Perpendiculaire indéfinie. Des deux Points R & S ſoient tirées deux Lignes RN, SL perpendiculaires ſur l'Axe AB. Soient prolongées ces deux perpendiculaires hors du demi-Cercle générateur, juſqu'à ce qu'elles rencontrent en P & en Q la Perpendiculaire élevée ſur l'extrémité du Raïon CD. Enfin du Point de contingence H ſoit tirée une Perpendiculaire HM ſur l'Axe AB. Fig. 73.

Cette préparation achevée; ſi l'on ſuppoſe que toutes ces Lignes reſtant dans la même ſituation faſſent une révolution entiere autour de l'Axe AB, il en réſultera,

1°. Que la demi-Circonférence ADB formera la Surface de la Sphére. Fig. 73. 74.

2°. Que la Tangente RS formera la Surface d'un Cône tronqué: la Perpendiculaire RN, la Circonférence de la grande Baſe de ce Cône: la

Perpendiculaire SL, la Circonférence de la petite Base; enfin HM, celle de la Base mitoyenne.

3°. Que PQ portion de la Perpendiculaire QD formera une Surface cylindrique, laquelle feroit partie du Cylindre total circonscrit à la Sphére, puisque la Ligne DQ est Perpendiculaire sur l'extrémité du Raïon CD.

4°. Que les Lignes PN & QL paralleles, comprises dans un espace parallele, & par conséquent égales entre elles, formeront les Bases du Cylindre produit par la révolution de la Ligne PQ.

Il est clair que ce Cylindre auroit la même Hauteur perpendiculaire, que le Cône tronqué produit par la révolution de la Tangente RS. Ce sont donc les Surfaces de ces deux Figures qu'il s'agit de comparer.

Pour démontrer leur égalité, il faut prouver, ainsi qu'on l'a indiqué dans l'objection précédente, que les Produisans de l'une de ces Surfaces sont les Extrêmes d'une Proportion dont les Produisans de l'autre sont les Moyens.

Les Produisans de la Surface cylindrique sont la Circonférence du Cercle dont PN est le Raïon, & PQ Côté du Cylindre.

Les Produisans de la Surface conique sont la Circonférence mitoyenne dont HM est le Raïon, & la Tangente RS Côté du Cône tronqué.

Et comme les Circonférences sont entre elles en même Raison que leurs Raïons, on peut, pour la commodité, substituer ceux-ci aux Circonférences, & les regarder comme Produisans,

Il s'agit donc de prouver que,

PN · HM :: RS · PQ.

Mais de la maniere dont ces Lignes sont situées dans la Figure, il seroit difficile de les comparer les unes aux autres; & nous n'en viendrons à bout, qu'en substituant à quelques-unes d'entre elles d'autres Lignes égales qui se compareront plus aisément.

Pour cela du Point C Centre du demi-Cercle, soit tiré au Point de contingence H, le Raïon CH, lequel par la construction est égal à PN l'un des Produisans du Cylindre; puisque PN est égal à DC, autre Raïon du demi-Cercle.

Du Point S extrémité de la Tangente soit aussi abaissée sur PN la Perpendiculaire ST, laquelle est égale à PQ, autre Produisant du Cylindre.

Ainsi, substituant aux deux Produisans de la Surface cylindrique PN & PQ, leurs égales, CH, ST, je dis que

CH · HM :: RS · ST.

Observons qu'au moyen des deux nouvelles Lignes tirées, nous avons ici deux Triangles rectangles: un grand CHM, dans lequel se trouve CH substitué à PN un des Produisans de la Surface cylindrique, & HM un des Produisans de la Surface conique: & de plus un petit Triangle RST, dans lequel se trouve RS un des Produisans de la Surface conique; & ST substitué à QP, l'un des Produisans de la Surface cylindrique.

Les deux Triangles rectangles sont sembla-

bles. Car 1°. tous les deux ont un Angle droit. 2°. L'Angle HCM ou HCA du grand Triangle, qui a pour mesure l'Arc HA, est égal à l'Angle SRT du petit Triangle. Car ce dernier est égal à l'Angle SHE, puisque la Tangente RS forme ces deux Angles en coupant avec la même obliquité les deux Paralleles RN, HM. Or l'Angle SHE formé par une Tangente SH & une Corde HME a pour mesure la moitié de l'Arc HAE, & par conséquent l'Arc HA tout entier moitié de HAE. Donc les deux Angles SRT du petit Triangle, & HCM du grand ayant pour mesure l'Arc HA, sont égaux. Donc les troisiémes Angles des deux Triangles sont égaux aussi. Donc les deux Triangles sont semblables. Donc ils ont leurs Côtés homologues proportionnels.

Ces Côtés homologues sont 1°. les deux Hypothénuses CH, RS. 2°. Les Côtés HM, ST opposés dans les deux Triangles à des Angles égaux. Donc CH Hypothénuse du grand Triangle, est à RS Hypothénuse du petit, comme HM dans le grand Triangle, est à ST son homologue dans le petit. En abrégé.

CH · RS :: HM · ST.

Et en remettant PN & PQ à la place de leurs substituées égales CH & ST, l'on aura,

PN · RS :: HM · PQ.

Donc $PN \times PQ = HM \times RS$.

Or le premier produit forme la Surface cylindrique; & le second, la Surface conique. Donc ces Surfaces sont égales : ce qui étoit à prouver.

Pour appliquer maintenant tout ceci à la Surface de la Sphére, il faut considérer que nous avons donné arbitrairement une certaine longueur à la Tangente RS. Nous pouvions la faire de la moitié plus petite ; & dans ce cas, la preuve auroit été la même, c'est-à-dire, que l'on auroit vu que la Surface conique produite par la Circonférence mitoyenne HM & par un plus petit Côté RS, auroit été égale à la Surface cylindrique correspondante, dont le Côté PQ auroit aussi été plus petit. Par conséquent, si à force de diminution, la Tangente RS devient infiniment petite, la Surface conique qu'elle décrira par sa révolution, sera égale à la petite Surface cylindrique correspondante. Or en mettant à part la Surface cylindrique formée par l'extrémité du Raïon CD, laquelle est commune à la Sphére & au Cylindre circonscrit, il y a autant de Surfaces coniques produites par la révolution du demi-Cercle ADB, que de Surfaces cylindriques formées par la révolution de MN Côté du Cylindre. Donc toutes les Surfaces coniques formées par les Tangentes, dont l'Arc du demi-Cercle est couvert, sont égales à la Surface courbe du Cylindre produite par la révolution du Côté MN. Fig. 75.

Mais les Tangentes, étant supposées infiniment petites, se confondent avec l'Arc du demi-Cercle : ou plutôt c'est leur totalité qui constitue cet Arc. Car les Points dont il est composé, changeant perpétuellement de Direction, forment deux à deux le commencement d'une Tangente, c'est-à-dire, une Tangente infiniment

petite. Donc *la Surface sphérique formée par la révolution du demi-Cercle ADB est égale à la Surface courbe du Cylindre circonscrit.*

On pourroit supposer que les petites Tangentes dont l'Arc du demi-Cercle est composé sont toutes égales entre elles. Et en effet, c'est la seule maniere dont on les puisse envisager quand on regarde la Circonférence du Cercle comme une Courbe uniforme, & qu'on la considere en se plaçant au Centre. Mais il y auroit un inconvénient à regarder sous ce point de vûe le demi-Cercle générateur. Car si les petites Tangentes du demi-Cercle sont considérées comme égales, les Cônes tronqués dont elles décrivent la Surface, seront inégaux dans leur Hauteur infiniment petite, & cette Hauteur diminuera à mesure qu'ils approcheront du Pôle. Car la Tangente D est perpendiculaire sur le Raïon CD. Donc la Tangente suivante est inclinée sur la Parallele suivante. Mais si ce Côté oblique est égal à la Perpendiculaire D, la Hauteur perpendiculaire du Cône tronqué sera plus petite que la Hauteur perpendiculaire du Cylindre CD. Ainsi dans cette supposition, on ne pourroit plus 1°. partager le Globe en Tranches circulaires d'égale épaisseur. 2°. les Raïons de ces Tranches perpendiculaires sur l'Axe du Globe n'auroient pas la même Largeur. 3°. Les Tranches correspondantes du Cylindre circonscrit auroient une Profondeur inégale qui diminueroit depuis la Tranche CD jusqu'à la Tranche AM par en haut, & jusqu'à la Tranche BN par en bas.

Fig. 71, 73.
Fig. 75.

Il eſt donc plus naturel, pour conſerver une égale épaiſſeur dans les Tranches du Globe & du Cylindre circonſcrit, de ſuppoſer que les petites Tangentes dont l'Arc du demi-Cercle générateur eſt couvert, ſont inégales, & vont toujours en augmentant de grandeur depuis la Tangente D juſqu'à la Tangente A d'un côté, & juſqu'à la Tangente B de l'autre. Ces Tangentes ne ſont donc autre choſe que les petites Obliques dont nous avons tant parlé, & qui terminent dans l'Arc du demi-Cercle les Raïons des Tranches élevés perpendiculairement ſur l'Axe AB. Il eſt démontré que ces petites Obliques décrivent une Surface égale à la petite Surface cylindrique correſpondante. Donc les Produiſans des deux Surfaces ſont réciproques. Donc l'augmentation de ces petites Obliques eſt en même Raiſon que la diminution des Raïons des Tranches. Ainſi, nous avons la preuve en rigueur d'une vérité que nous ne faiſions qu'entrevoir avec la plus grande vraiſemblance; & nous voyons que la preuve géométrique s'unit avec les conſidérations métaphyſiques, pour former une démonſtration complette, qui leve toutes les difficultés & diſſipe tous les doutes.

Il réſulte de cette découverte pluſieurs Corollaires intéreſſans.

1°. *La Surface de la Sphére eſt le produit de la Circonférence d'un de ſes grands Cercles quelconques, par ſon Axe, ou ce qui eſt la même choſe, par l'un de ſes Diamétres.* Car la Surface courbe du Cylindre circonſcrit eſt le produit de la Circonférence de ſa Baſe (égale au grand Cercle

de la Sphére) par le Côté du Cylindre (égal aussi à l'Axe de la Sphére.)

2°. *La Surface de la Sphére est égale à celle de quatre de ses grands Cercles, ou, ce qui est la même chose, à la Surface d'un Cercle quadruple d'un de ses grands Cercles.* Car la Surface d'un grand Cercle de la Sphére est le produit de la Circonférence par la moitié du Raïon ou le quart de l'Axe. Donc le produit de la Circonférence par l'Axe entier (ce qui forme la Surface du Globe) est quadruple d'un grand Cercle. On aura donc la Surface du Globe, ainsi que la Surface courbe du Cylindre circonscrit, dans une Surface plane, c'est-à-dire, en un Cercle dont l'Axe du Cylindre ou du Globe seroit le Raïon.

Fig. 77. 3°. *La Surface de la Sphére, ainsi que la Surface du Cylindre circonscrit, est égale à un seul Rectangle, dont la Base seroit une Ligne droite égale à la Circonférence du grand Cercle, & qui auroit le Diamétre pour Hauteur.* Car ce Rectangle seroit égal à quatre grands Cercles de la Sphére.

4°. *La Boëte entiere du Cylindre circonscrit est à la Surface de la Sphére comme 6 est à 4, ou comme 3 est à 2.* Car la Surface courbe du Cylindre circonscrit vaut quatre grands Cercles de la Sphére. En ajoutant celui de la Base inférieure & celui de la Base supérieure, on aura six grands Cercles pour la Surface de la Boëte cylindrique. La Boëte sphérique en vaut quatre. Donc.

Fig. 78. 5°. *Le Quarré du Diamétre de la Sphére est à la Surface de la Sphére, comme le même Dia-*

métre est à la Circonférence du grand Cercle. Car le Quarré du Diamétre est le produit du Diamétre par le Diamétre; & la Surface de la Sphére est le produit de la Circonférence du grand Cercle par le Diamétre. Or les Figures qui ont un Produisant égal, sont entre elles comme les inégaux. Donc, &c. Le Diamétre est à la Circonférence à peu près comme 7 à 22. Donc le Quarré du Diamétre de la Sphére est un peu moins du tiers de la Surface de la même Sphére.

On peut observer que la section du Cylindre circonscrit, coupé dans la direction de l'Axe, est aussi le Quarré du Diamétre de la Sphére. Donc cette section est aussi un peu moins du tiers de la Surface courbe du Cylindre.

6°. Il n'est pas plus difficile de mesurer des parties de la Surface de la Sphére, que de mesurer la Surface entiere. Ainsi, *la Surface d'une Zône & d'un Segment ou Calote sphérique, est le produit de la Circonférence d'un grand Cercle de la Sphére, par la portion d'Axe ou de Diamétre comprise dans l'épaisseur de la Zône ou du Segment.* Car la Surface de la Zône ou du Segment est égale à celle de la portion du Cylindre circonscrit qui lui correspond. Or celle-ci est le produit de la Circonférence du grand Cercle par la portion du Côté compris; & cette portion est égale à la partie d'Axe qui se trouve dans la Zône & dans le Segment. Fig. 58, 61.

A l'égard du Secteur, nous avons vû qu'il est composé d'un Segment & d'un Cône droit. On sçait la mesure de la Surface d'un tel Cône dont le Côté est Raïon de la Sphére. Il ne s'agit que

d'en joindre la valeur à celle de la Surface du Segment, pour en faire une Somme totale.

TROISIE'ME SECTION.

STÉREOMETRIE,

ou

Mesure de la Solidité des Polyëdres.

APrès avoir mesuré la Surface des Solides, c'est-à-dire, cette espéce de boëte dans laquelle nous concevons le Solide renfermé, il faut enfin examiner en quoi consiste la Solidité, c'est-à-dire, l'étendue complette.

Il n'y a aucune portion d'étendue qui ne comprenne réellement les trois Dimensions. Mais la Longueur, la Largeur & la Profondeur étant imperceptibles dans le Point, on peut quelquefois l'en dépouiller par l'esprit. La Ligne ne nous présente que la Longueur; & l'on fait aisément abstraction de sa Largeur & de sa Profondeur. La Surface ne nous montre qu'une combinaison de Longueur & de Largeur, dans laquelle l'idée de la Profondeur n'entre pour rien. Mais le Solide réunit clairement les trois Dimensions.

Nous avons vû que les Points sont Elémens de la Ligne; les Lignes, de la Surface. Les Surfaces sont donc Elémens du Solide. Par conséquent, il faut considérer le Solide comme un amas de Tranches infiniment minces posées parallélement les unes sur les autres, & sans intervalle entre elles.

Si les Tranches sont égales, elles forment un Prisme. Lorsqu'elles sont inégales, & qu'elles se terminent ou tendent à se terminer en pointe, elles forment des Pyramides. Enfin, elles formeront des Polyëdres à facetes ou des Globes, lorsqu'après avoir été d'abord en augmentant, elles finissent par décroître.

CHAPITRE PREMIER.

SOLIDITÉ DES PRISMES.

CE que nous avons établi dans le Livre précédent sur la mesure du Parallélogramme rectangle, détermine d'une maniere si palpable celle de la Solidité des Prismes, qu'il suffira d'en faire l'application.

Il est évident, disions-nous, que le Rectangle est produit par la Base AB répétée autant de fois qu'il y a de Points dans le Côté perpendiculaire AC. Car si de tous les Points de AC, l'on tire au Côté opposé BD des Lignes paralleles, & par conséquent égales à la Base, elles couvriront tout l'espace du Rectangle. Donc pour avoir la valeur de cet espace, il faut prendre autant de fois la Base AB qu'il y a de Points dans le Côté AC, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier la Base par le Côté perpendiculaire. Fig. 79.

Supposons, disions-nous encore, que nous n'ayons que la Ligne AB, & que nous l'élevions toujours parallélement à elle-même, en sorte qu'en quittant sa place, elle y laisse une Ligne

égale, le Rectangle sera formé. Mais cette Ligne AB étant composée de Points, chacun laisse aussi un Point dans la place qu'il quitte; & la suite de tous ces Points forme des Lignes perpendiculaires. Par exemple, le Point A trace la Ligne AC; & le Point B, la Ligne BD. Le Rectangle est donc couvert d'autant de Lignes AB, qu'il y a de Points A dans le Côté AC, ou de Points B dans le Côté BD, ou dans toute autre Ligne perpendiculaire tirée de la Base supérieure sur l'inférieure. Donc pour avoir la mesure du Rectangle, il faut multiplier la Base par la Hauteur perpendiculaire.

Fig. 81. En suivant la même analogie, je conclus: Donc *pour avoir la Solidité d'un Prisme droit, il faut multiplier le Polygône qui lui sert de Base par la Hauteur du Prisme, c'est-à-dire, par une Perpendiculaire quelconque abaissée de la Base supérieure sur l'inférieure.* Car ce Solide est composé de Tranches polygonales d'une parfaite égalité. Or il y a dans le Prisme autant de ces Tranches que de Points dans la Ligne de Hauteur perpendiculaire.

En effet la Base, c'est-à-dire, la premiere Tranche n'a qu'un Point de commun avec cette Ligne. On peut donc faire passer par chaque Point de cette Ligne une Tranche parallele & égale à la Base. Donc il y a autant de Tranches dans le Prisme, que de Points dans sa Hauteur perpendiculaire.

Fig. 81. Supposons encore qu'ayant un Polygône quelconque tel que A ou B, je le fasse mouvoir soit de haut en bas, soit de bas en haut, suivant une

Direction perpendiculaire & parallélement à sa premiere position, en sorte qu'il laisse sur sa route une continuité d'autres lui-même : chaque Point du Polygône laissera aussi une traînée de Points dont la suite forme une Ligne perpendiculaire. Il y a donc autant de Tranches dans le Prisme que de Points dans la Perpendiculaire. Donc *pour avoir la valeur de ce Polyëdre, il faut multiplier la Base par la Ligne de Hauteur.*

Il suit de-là 1°. que *deux Prismes droits quelconques sont égaux lorsqu'ils ont même Base & même Hauteur.* Or quand on dit *même Base*, on n'exige pas qu'elle soit en même tems *semblable.* Il seroit trop manifeste que les deux Figures ne différeroient en aucune sorte. On entend donc ici par Bases égales, celles qui contiennent le même espace, quoique d'une forme différente.

Je suppose, par exemple, que la Base du Prisme pentagonal A soit égale en ce sens à celle du Cylindre B ; & que la Hauteur des deux Solides soit la même : je dis qu'ils ont la même Solidité. Car il y a autant de Tranches circulaires dans le Cylindre B, que de Tranches pentagonales dans le Prisme A. Or chaque Tranche pentagonale est égale à chaque Tranche circulaire. Donc, &c. Fig. 81.

2°. Il suit qu'*un Prisme incliné est égal au Prisme droit de même Base & de même Hauteur.* Car les Tranches sont égales dans les deux Prismes ; & leur nombre est déterminé par le nombre des Points contenus dans leur Ligne de Hauteur. Fig. 81.

En effet, supposons que chaque Tranche du

Liv. III. III. Sect. Chap. I.

Priſme pentagonal & du Cylindre droit, étant prolongées dans l'eſpace parallele, aillent couper le Priſme pentagonal & le Cylindre inclinés : ces Tranches ainſi prolongées rempliront abſolument l'eſpace parallele dans lequel les quatre Figures ſont poſées. Par conſéquent, toutes les Tranches du Priſme & du Cylindre inclinés ſe trouveront confondues dans la prolongation des Tranches des Priſmes droits. Donc il n'y a pas plus de Tranches dans les Priſmes inclinés que dans les Priſmes droits. Or, par la ſuppoſition, les Tranches ſont égales de part & d'autre. Donc pour avoir la Solidité d'un Priſme incliné, il faut multiplier ſa Baſe, non par la Ligne oblique qui lui ſert de Côté, mais par la Ligne de ſa Hauteur perpendiculaire.

Fig. 80. Cette concluſion ne paroîtra point ſinguliere, ſi l'on ſe rappelle ce que nous avons établi dans le Livre précédent ſur la meſure du Parallélogramme incliné. Nous avons vû que la Baſe AB préſente au Côté AC, non un Côté perpendiculaire, mais une ſection oblique plus longue, priſe dans l'épaiſſeur de la Ligne. Par conſéquent, cette ſection touche la valeur de plus d'un Point dans le Côté AC. On ne pourroit donc, ſans une grande mépriſe, prendre la Baſe AB autant de fois qu'il y a de Points dans le Côté AC. Mais on ne ſe trompera point en prenant la Baſe AB autant de fois qu'il y a de Points dans la Hauteur perpendiculaire EF; car chaque Point de la Ligne EF a la même épaiſſeur que la Ligne AB.

Fig. 81. De même dans le Priſme incliné, la Tranche X ſe préſente au Côté CD, non par un Côté

perpendiculaire, mais par une ſection oblique priſe dans l'épaiſſeur de la Tranche, & par conſéquent plus longue que la perpendiculaire. Donc il faut multiplier la Tranche *X*, non par le nombre des Points contenus dans le Côté CD, mais par les Points de la Hauteur perpendiculaire.

Conſidérons encore que les Tranches des Priſmes ſont elles-mêmes des Priſmes infiniment minces, de même nature que ceux dont ils ſont les Elémens. Il n'y a pas plus de ces petits Priſmes dans le Priſme incliné, que dans le Priſme droit de même Baſe & de même Hauteur. Or par la ſuppoſition, le petit Priſme qui ſert de Baſe au Priſme incliné, eſt égal à la Baſe du Priſme droit. Donc le total des petits Priſmes inclinés eſt égal au total des petits Priſmes droits. Donc, &c.

Après avoir établi ces vérités générales ſur la meſure des Priſmes, il faut développer d'une maniere plus ſenſible, ce que préſente peut-être de trop vague l'idée d'*une Baſe priſe autant de fois qu'il y a de Points dans une Ligne de Hauteur perpendiculaire.*

Rappellons-nous ce que nous avons déja dit pluſieurs fois ſur la formation du Cube. En conſidérant le Point A comme partie intégrante de la Ligne AB, nous avons vû qu'il devoit avoir une Longueur infiniment petite. La même raiſon nous a contraint de lui donner une Largeur, lorſque nous l'avons conſidéré comme formant, avec les autres Points de la Ligne AB, une Surface quarrée ABC. D'où nous avons conclu que Fig. 82.

la Surface ABC étoit composée d'une multitude de Points quarrés, dont le nombre étoit le produit des Points de la Ligne AB par ceux de la Ligne AC.

Mais à présent que nous considérons le Quarré ABC, non plus comme une simple Surface, mais comme une Tranche quadrangulaire partie intégrante du Cube, nous sommes obligés de lui donner autant d'épaisseur, que nous avons donné de largeur à la Ligne, & de longueur au Point. Dès-lors le Point A devient un Cube infiniment petit; & la Tranche ABC un amas d'une infinité de ces petits Cubes joints ensemble sans intervalle, & formant une couche quarrée.

Maintenant, si l'on éleve la Tranche ABC dans une direction perpendiculaire, & à une Hauteur égale à sa Longueur & à sa Largeur, il est évident que chaque petit Cube de la Tranche ABC décrira dans sa route une Ligne perpendiculaire composée d'autant de petits Cubes qu'il y en a, soit dans AB, soit dans AC. Ainsi le nombre de ces Cubes contenus dans le grand Cube ABCD, n'est autre chose que le nombre des Cubes de la Ligne AB élevé à la troisiéme *puissance*, c'est-à-dire, multiplié deux fois par lui-même. Par conséquent, on s'exprime très-bien en disant, que *pour avoir la Solidité de ce Cube, il faut prendre sa Base autant de fois qu'il y a de Points dans sa Hauteur perpendiculaire.* Car par ces Points on entend, non toute sorte de Points, mais des Points parfaitement égaux à ceux qui sont les Elémens de la Base.

Je sçais que ces Cubes ne sont pas des unités parfaites;

parfaites; que divisibles en Cubes infiniment plus petits encore, ils sont eux-mêmes susceptibles de plus ou moins de grandeur dans cette petitesse infinie du premier ordre où nous les supposons. Mais comme il ne peut y avoir d'unité parfaite dans l'Etendue, il est nécessaire pour la mesurer d'avoir recours à des unités fictices qui n'excluent point la divisibilité.

Aucune portion d'étendue n'est en elle-même ni grande ni petite: la Grandeur & la Petitesse sont des idées relatives. Par conséquent, on ne peut mesurer un espace qu'en le comparant à un autre mieux connu. Il faut donc pour s'entendre & pour se faire entendre, convenir de mesures exactes, qui, quoiqu'espaces réels, soient cependant regardés comme des espéces d'unités. Pour aller jusqu'à la derniere précision, j'ai cru devoir descendre jusqu'aux Elémens infiniment petits. Mais comme chaque Ligne, chaque Surface, chaque Solide en contient une infinité; & qu'il est impossible de faire un résultat d'infinités plus ou moins grandes, variables à l'infini, ce seroit en vain que l'on essayeroit de juger de la grandeur d'un espace par un calcul trop disproportionné aux forces de l'esprit humain. Il faut donc pour l'usage se contenter d'unités fictices d'une espéce plus grossiere, & se servir de Toises, de Pieds, de Pouces & de Lignes, parceque nous n'avons à mesurer que des objets sensibles; & que ce qui est au-dessous de ces mesures, est imperceptible pour nous. (a)

(a) Si nous avions une plus grande taille, & que nos sens eussent une grossiéreté plus grande à proportion, ces

LIV. III. III. SECT. CHAP. I.

Nous avons vû que ces mesures étant linéaires, décidoient de la Longueur; qu'étant quarrées, elles donnoient la valeur d'une Surface. Il nous reste à conclure qu'elles doivent être cubiques pour déterminer la grandeur d'un Solide. On n'a pas de peine à comprendre qu'une Toise cubique, un Pied ou un Pouce cubique, sont des Cubes dont chaque Dimension est d'une Toise, d'un Pied, d'un Pouce, &c.

Pour en faire l'application, je prends un Parallélipipéde droit (car ce Polyëdre est tout aussi facile à mesurer que le Cube) je suppose que le Parallélipipéde ait 3 Pieds de Longueur, 2 de Largeur & 4 de Profondeur. Selon nos principes il doit contenir 24 Pieds cubiques. Car 3 de Longueur multipliés par 2 de Largeur font 6, & 4 fois 6 font 24. Voyons donc si dans la vérité nous trouverons 24 Pieds cubiques dans notre Parallélipipéde.

Fig. 83. Je coupe d'abord la Figure de Pied en Pied parallélement à la Base; & ces sections me donnent 4 Parallélipipédes de 3 Pieds de Longueur, de 2 de Largeur, & d'un Pied de Profondeur.

Ensuite par d'autres sections paralleles à deux des Côtés opposés & faites de Pied en Pied dans la Ligne de Longueur, je coupe chacun de ces 4 Parallélipipédes en 3 parties égales. J'ai donc alors 3 fois 4 ou 12 Parallélipipédes d'un Pied

mesures seroient encore trop petites pour notre usage. Mais il nous en faudroit de moins grandes, si nous étions plus petits, & si nos sens avoient plus de subtilité. Un Ciron, par exemple, qui seroit capable de juger de l'étendue des objets, devroit avoir des mesures si petites, que notre imagination ne peut se les représenter.

de Longueur, d'un de Profondeur, & de 2 de Largeur.

Enfin, si par une section parallele à la Face antérieure & à la postérieure, je coupe chacun de ces 12 Parallélipipédes en deux parties égales, j'aurai 2 fois 12 ou 24 Parallélipipédes d'un Pied de Longueur, d'un de Largeur, & d'un de Profondeur, c'est-à-dire, 24 Cubes d'un Pied.

Mais, dira-t'on, puisque ces unités fictices sont arbitraires, pourquoi leur suppose-t'on la forme cubique plutôt que toute autre? Il est vrai que cette forme est commode pour mesurer des Parallélipipédes droits, parceque des Cubes & des parties de Cubes s'y peuvent arranger aisément. Mais il est impossible de remplir de ces petits Solides les Parallélipipédes inclinés, & moins encore les Pyramides, les Solides à facettes & les Sphéres. Fig. 84.

Je réponds que s'agissant de comparer ensemble des Figures fort différentes, il faut convenir d'une mesure simple, uniforme & invariable, qui puisse convenir à tous les Polyëdres. Or, la mesure cubique a toutes ces qualités; parcequ'une seule de ses Dimensions, c'est-à-dire, sa Racine, suffit pour la déterminer. Dès qu'on parle d'un Pied cube, tout le monde se forme une idée nette de cette grandeur. Mais si l'on prenoit pour unités fictices de petits Cylindres, de petites Pyramides, de petits Globes, ou même de petits Parallélipipédes droits ou inclinés, on ne sçauroit plus à quoi s'en tenir; parcequ'il faut plusieurs conditions pour déterminer ces Figures: & même, après toutes les précautions

requiſes, il faudroit faire effort pour ſaiſir ces unités bizarres. Par conſéquent, les meſures des Solides doivent être des unités cubiques, de même que les unités quarrées ſont la meſure des Surfaces, ſuppoſé que tous les Solides puiſſent ſe réduire au Parallélipipéde droit, comme tous les Polygônes ſe réduiſent au Rectangle.

Or 1°. il eſt facile de réduire les Parallélipipédes inclinés au Parallélipipéde droit. Car un Parallélipipéde incliné eſt égal au droit de même Baſe & de même Hauteur.

2°. La réduction des autres Priſmes tant droits qu'inclinés, & même du Cylindre, ne ſouffre guères plus de difficulté. Car tous ces Priſmes ſont égaux au Parallélipipéde droit de même Baſe & de même Hauteur. On n'a beſoin que d'opérer ſur la Baſe, c'eſt-à-dire, de trouver un Rectangle égal à la Baſe des autres Priſmes & du Cylindre: ce qui eſt une affaire de Planimétrie.

3°. Il ne s'agit donc plus que de réduire au Parallélipipéde droit, les Pyramides & les autres Polyédres, comme on réduit au Rectangle toutes les eſpéces de Polygônes. C'eſt ce dont nous allons traiter dans les Chapitres ſuivans.



CHAPITRE II.

Solidité des Pyramides.

LEs Pyramides ont avec les Prismes quelque chose de commun, & quelque chose de différent.

Comme les Prismes, elles sont composées de Tranches polygonales parfaitement semblables, dont le nombre est déterminé, ainsi que dans les Prismes, par la Hauteur perpendiculaire.

Mais ces Tranches égales & semblables dans les Prismes, ne sont que semblables dans les Pyramides, & vont toujours en diminuant, depuis la Base jusqu'au Sommet, que l'on doit regarder comme un Polygône semblable à la Base, mais infiniment petit.

De ce que les Pyramides ont de commun avec les Prismes, il suit 1°. que *la Pyramide droite est égale en Solidité à l'inclinée de même Base & de même Hauteur.*

Car l'une & l'autre ont le même nombre de Tranches, & chaque Tranche est égale à sa correspondante dans l'autre Pyramide. En effet, la diminution des Tranches est toujours uniforme dans la Pyramide soit droite soit inclinée, ces sortes de Figures n'admettant ni bosses ni sinuosités. Chaque Tranche d'une Pyramide droite, est une Pyramide tronquée droite infiniment mince : de même chaque Tranche d'une Pyramide oblique, est aussi une petite Pyramide obli- Fig. 84.

que tronquée. Si donc, malgré cette différence, la premiere Tranche de l'une est égale à la premiere Tranche de l'autre, ainsi qu'on le suppose, la quarantiéme Tranche, par exemple, de la Pyramide inclinée, qui a la même inclinaison que la premiere, doit être égale à la quarantiéme Tranche de la Pyramide droite. Donc, &c.

Les Cônes sont de véritables Pyramides: Donc *les inclinés sont égaux aux droits de même Base & de même Hauteur.*

Il suit 2°. que *les Pyramides, quoique de forme différente, sont égales, lorsqu'elles ont des Bases égales & la même Hauteur.*

Fig. 85. Je suppose, par exemple, que la Base exagonale d'une Pyramide droite soit égale à la Base circulaire d'un Cône, & que ces deux Figures aient la même Hauteur: je dis qu'elles ont aussi la même Solidité.

Car 1°. le Cône est composé d'autant de Tranches circulaires, qu'il y a de Tranches exagonales dans la Pyramide. 2°. La premiere Tranche du Cône est supposée égale à la premiere Tranche de la Pyramide. 3°. Les Tranches dans l'un & dans l'autre Solide vont en diminuant d'une maniere toujours uniforme, jusqu'à ce qu'elles se terminent en un Point à la même Hauteur: car ces Figures, comme on l'a déja dit, n'admettent ni bosses ni sinuosités. Les Tranches décroissent donc en même Raison dans l'une & dans l'autre. Donc, prises à la même Hauteur, elles sont égales. Donc les deux Figures ont la même Solidité.

Il est clair par-là, que toutes les Pyramides peuvent aisément se réduire à la Pyramide droite d'une Base quelconque : & c'est déja une grande avance ; puisqu'il ne s'agit plus que de trouver la mesure de la Solidité de celle-ci, en la comparant au Prisme de même Base & de même Hauteur. Ces deux Solides ont le même nombre de Tranches par la supposition. Mais les Tranches Pyramidales vont en décroissant jusqu'au Sommet ; & c'est en cela que ces deux Figures différent l'une de l'autre. Ce seroit donc une étrange méprise, si pour évaluer la Solidité d'une Pyramide, on multiplioit sa Base par sa Hauteur.

Le Rapport que nous avons remarqué entre la Pyramide & le Triangle d'un Côté ; & entre le Prisme & le Parallélogramme de l'autre, pourroit d'abord faire penser que la Pyramide est moitié du Prisme de même Base & de même Hauteur, de même que le Triangle est moitié du Parallélogramme correspondant. On pourroit même s'affermir dans cette pensée en se rappellant, que si l'on coupe un Triangle à moitié de sa Hauteur par une Base parallele à la grande, cette petite Base est moitié de la grande, & devient par conséquent un des produisans du Triangle ; & que nous avons aussi prouvé ci-dessus que si l'on coupe une Pyramide droite à moitié de sa Hauteur, la section donne une Base supérieure dont le Périmétre est moitié du Périmétre de la Base inférieure, & devient par cette raison l'un des produisans de la Surface de la Pyramide. On pourroit donc soupçonner,

V. L. 2. S. 3. P. 2. Ch. 2.

V. ci-dessus S. 2. Ch. 2.

en suivant la même analogie, que pour avoir la Solidité de la Pyramide, il faudroit multiplier cette Tranche mitoyenne par la hauteur du Solide.

Mais si l'on y fait attention, on verra que l'on est bien loin de compte. Car cette Tranche mitoyenne n'est que le quart de la Base inférieure. En effet, puisque le Périmétre de celle-ci est double du Périmétre de la Tranche mitoyenne, le Raïon droit de la premiere est double aussi du Raïon droit de la seconde. Donc ces deux Polygônes sont entr'eux comme 4 est à 1. Donc en prenant la Tranche mitoyenne de la Pyramide pour un des Produisans de sa Solidité, elle ne seroit que le quart du Prisme de même Base & de même Hauteur.

Abandonnons donc ces petites analogies qui ne sont propres qu'à faire illusion. Il est visible que la Pyramide est plus que le quart du Prisme correspondant. Il est encore assez visible qu'elle n'en est pas moitié. Car la diminution des Tranches dans la Pyramide en tout sens depuis la Base jusqu'au Sommet est si considérable, qu'elle doit emporter plus de la moitié de l'espace solide renfermé dans le Prisme de même Base & de même Hauteur.

Quel est donc le Rapport de ces deux Solides? Il faut avouer qu'il ne saute pas aux yeux. Ce n'est qu'à force de recherches que les Géométres ont trouvé qu'il étoit de 3 à 1, c'est-à-dire, que le Prisme est triple de la Pyramide de même Base & de même Hauteur. Voici de quelle maniere ils sont parvenus à cette découverte.

I.

EN considérant un Prisme triangulaire, on voit qu'il peut être partagé en trois Pyramides triangulaires égales. Je trouve la preuve de cette assertion aussi clairement énoncée qu'elle le peut être, dans un Ouvrage généralement estimé. Je ne peus mieux faire que de la transcrire. Mais j'avertis que pour la comprendre, il seroit à propos d'avoir en relief un Prisme triangulaire partagé selon les sections que l'on va expliquer. Le secours d'une Planche gravée n'y suppléera que foiblement.

Liv. III. III. Sect. Chap. II. Fig. 87, 88.

« Soit imaginé un Plan ABF qui passe par le » Côté AB de la Base inférieure du Prisme V; » & par le Point F de la Base supérieure: il re- » tranchera du Prisme la Pyramide X, qui a pour » Base le Triangle ABC, c'est-à-dire, la Base » du Prisme; & pour Hauteur, celle du même » Solide: le Sommet F de cette Pyramide étant » un Point de la Base supérieure du Prisme.

La Géométrie de l'Officier, T. 2. pag. 284.

» Si par le Point A de la Base inférieure, & » par le Côté EF de la supérieure, on fait aussi » passer un Plan AEF, il partagera le reste du » Prisme en deux Pyramides triangulaires éga- » les Y & Z. Je dis égales; parcequ'elles ont » chacune pour Base la moitié du Parallélogram- » me ABED, attendu que le Plan coupant AEF » passe par la Diagonale de ce Parallélogramme. » Elles ont aussi la même Hauteur; puisque le » Sommet de chacune est au même Point F de » la Base supérieure du Prisme. Ainsi Y=Z.

» Si l'on compare présentement la Pyramide » X avec la Pyramide Y, on trouvera de même

Liv. III. III. Sect. Chap. II.

» que ces deux Pyramides ont chacune pour » Base la moitié du Parallélogramme BCEF ; » puisque le Plan coupant ABF passe par sa Diagonale BF ; & qu'elles ont aussi même Hauteur, le Sommet de l'une & de l'autre étant au » même Point A. Donc la Pyramide X est égale » à la Pyramide Y. Mais cette Pyramide Y est » égale à la Pyramide Z. Donc les trois Pyramides X, Y, Z sont égales entre elles. Donc tout » Prisme triangulaire peut se partager en trois » Pyramides triangulaires égales. Donc tout » Prisme triangulaire est triple d'une Pyramide » triangulaire de même Base & de même Hauteur. »

Pour appliquer ce que l'on a découvert sur le Prisme & la Pyramide triangulaire à tous les Prismes & Pyramides quelconques de même Base & de même Hauteur, il faut observer qu'il n'y a point de Prismes que l'on ne puisse partager en Prismes triangulaires; puisque ses Bases étant des Polygônes égaux & semblables, peuvent être partagées en autant de Triangles égaux, qu'ils ont de Côtés moins deux. Donc en faisant passer des Plans par les Côtés correspondans des Triangles de la Base supérieure & de l'inférieure, le Prisme total sera partagé en autant de Prismes triangulaires, qu'il a de Faces moins deux. (Fig. 86, 89.)

D'un autre côté, il n'y a point de Pyramide que l'on ne puisse partager en un certain nombre de Pyramides triangulaires. Pour cela il ne faut que partager le Polygône de sa Base en autant de Triangles qu'il a de Côtés moins deux ; (Fig. 90.)

& faire passer des Plans par ces divisions & par le Sommet de la Pyramide.

Ayant, par exemple, un Prisme & une Pyramide pentagonales de même Base & de même Hauteur, je puis partager le Prisme & la Pyramide en trois Prismes & en trois Pyramides triangulaires. Or chaque Pyramide aura la même Base & la même Hauteur que le Prisme triangulaire auquel elle correspond. Donc chaque portion de la Pyramide totale étant le tiers de chaque portion correspondante du Prisme total, la Pyramide entiere sera le tiers du Prisme entier.

LIV. III. III. SECT. CHAP. II. Fig. 89, 90.

2.

ON a trouvé le Rapport précis de la Pyramide au Prisme d'une maniere moins compliquée, par la considération du Cube.

Elém. de Géom. de M. Clairaut p. 180. & suiv. Fig. 91.

Des quatre Angles ABCH de la Base de ce Solide, soient tirées quatre Lignes droites au Point O Centre de la Figure. Ces quatre Lignes jointes à la Base représentent une Pyramide droite quadrangulaire.

Cette Pyramide n'est que la sixiéme partie du Cube entier. Pour s'en convaincre d'une maniere sensible, il n'y auroit qu'à prolonger les quatre Lignes jusqu'aux Angles de la Base supérieure, & joindre ces Lignes deux à deux par des Plans angulaires, dont le Sommet commun seroit le Point O Centre du Cube. On verroit alors ce Solide partagé en six Pyramides parfaitement égales & semblables, dont la Base seroit une des Faces du Cube, & dont la Hauteur seroit un Raïon droit du Cube comme OL.

Donc la Pyramide OABCH n'est que le sixiéme du Cube. Par conséquent, si l'on coupoit le Cube en deux Parallélipipédes égaux par un Plan qui passeroit par le Point O Sommet de la Pyramide & Centre du Cube, la Pyramide OABCH seroit le tiers du Parallélipipéde dans lequel elle est contenue. Ces Solides ont même Base & même Hauteur : les Produisans du Parallélipipéde sont la Base ABCH & la Hauteur entiere OL. Donc les Produisans de la Pyramide sont la même Base ABCH & le tiers de la Hauteur OL.

Mais la propriété de la Pyramide quadrangulaire sixiéme du Cube de Hauteur double, lui est-elle commune avec toutes les Pyramides quelconques, même avec celles qui, quelque transformées qu'elles fussent en Pyramides quadrangulaires, ne pourroient jamais être la sixiéme partie d'un Cube ? voilà la question.

Pour la résoudre soit une Pyramide quelconque, exagonale si l'on veut, & de telle Hauteur que l'on jugera à propos. Imaginons un Cube dont la Hauteur soit double ; & comparons la Pyramide quadrangulaire qui seroit la sixiéme partie de ce Cube, avec notre Pyramide exagonale.

Toutes les deux ont la même Hauteur, & ne différent par conséquent que par leurs Bases. Il n'est pas douteux que la Hauteur & la Base n'entrent dans la production de leur Solidité. Donc ayant un Produisant commun, sçavoir, leur Hauteur, ou une partie quelconque de leur Hauteur, elles sont entre elles comme leurs Bases, c'est-à-dire, comme leurs Produisans inégaux.

En effet, il y a autant de Tranches semblables dans la Pyramide exagonale, que de Tranches quarrées dans la quadrangulaire, puisqu'on les suppose de même Hauteur. Donc quelque soit le Rapport de leur Base, il se perpétue entre les Tranches correspondantes. Car ces Solides ayant même Hauteur, il faut de part & d'autre que les Tranches s'élevent en décroissant selon la même Raison. Or la Solidité de la Pyramide quadrangulaire n'est que l'amas d'un certain nombre de Tranches quarrées, comme la Solidité de la Pyramide exagonale n'est que l'amas d'un même nombre de Tranches exagonales. Donc les deux amas ne peuvent différer que selon la grandeur relative des Tranches ou des Bases dans les deux Pyramides. Donc ces deux Solides sont entre eux comme leurs Bases. Donc puisque la Solidité de la Pyramide quadrangulaire est le produit de sa Base par le tiers de sa Hauteur, la Solidité de la Pyramide exagonale ne peut être non plus que le produit de sa Base, quelqu'elle soit, par le tiers de la même Hauteur. Or le Prisme de même Base & de même Hauteur que la Pyramide exagonale est le produit de la même Base par la Hauteur entiere. Donc la Pyramide exagonale, & par conséquent toute Pyramide quelconque est le tiers du Prisme de même Base & de même Hauteur.

Le Cône est une véritable Pyramide. Donc aussi tout Cône est le tiers du Cylindre de même Hauteur & de même Base.

Les Pyramides & les Cônes inclinés sont égaux aux Pyramides & aux Cônes droits de

même Base & de même Hauteur. Ainsi la mesure des premiers ne souffre aucune difficulté. Il est singulier que des Solides dont on ne peut au juste évaluer la Surface, se prêtent de si bonne grace lorsqu'il s'agit de leur Solidité.

Mais voici une singularité toute opposée. Nous avons vû qu'on trouvoit aisément la Surface des Pyramides & des Cônes tronqués droits, en multipliant la Circonférence de la Tranche mitoyenne entre les deux Bases, par le Côté de la Pyramide & du Cône tronqué. On pourroit donc s'imaginer qu'on en auroit la Solidité en multipliant la Surface de cette Base mitoyenne par la Hauteur de la Pyramide ou du Cône tronqué. Mais on se tromperoit fort. Car si la Circonférence de la Tranche mitoyenne est Moyenne arithmétique entre les Circonférences des deux Bases, il n'en est pas de même de la Surface mitoyenne comparée aux Surfaces des deux Bases. En effet, ces Surfaces sont entre elles, non comme leurs Circonférences ou leurs Raïons, mais comme les Quarrés de ces Circonférences & de ces Raïons.

Fig. 921. Ainsi, pour parvenir à la Solidité d'une Pyramide tronquée ou d'un Cône tronqué, il faut 1°. supposer ce qui leur manque, c'est-à-dire, la petite Pyramide ou le petit Cône qu'on a retranchés. 2°. Mesurer la Pyramide entiere ou le Cône entier. 3°. Oter du produit total la valeur de la petite Pyramide ou du petit Cône. Le reste sera la Solidité de la Pyramide tronquée & du Cône tronqué.

CHAPITRE III.

Solidité des Polyëdres à facetes & de la Sphére.

Fig. 50, 51, 52, 53, 54.

CE que nous venons d'établir dans le Chapitre précédent sur la décomposition du Cube en six Pyramides quadrangulaires égales, nous fait voir clairement que tous les Solides réguliers à facetes peuvent de même se décomposer en autant de Pyramides égales qu'ils ont de Faces. La Base de ces Pyramides est la même dans chaque Figure : quarrée dans l'Exaédre ; Pentagonale dans le Dodécaédre ; & triangulaire dans les trois autres. Leur Hauteur est aussi la même, puisqu'elle est exprimée par une Perpendiculaire tirée du Centre de la Figure sur l'une de ses Faces, c'est-à-dire, par son Raïon droit.

Il suffira donc d'avoir la mesure d'une de ces Pyramides, & d'en multiplier la valeur par le nombre des Faces : par 4, si c'est un Tétraëdre : par 6, si c'est un Exaédre, &c. Ou, si l'on veut, on dira que le Solide régulier est le total de ses Faces multiplié par le tiers de son Raïon droit. Car il est évident que toutes ces Pyramides seroient égales à une seule de même Hauteur, & qui auroit pour Base un Polygône égal à toutes les Faces du Solide régulier.

A l'égard des autres Polyëdres à facetes dont l'irrégularité peut varier à l'infini, il est clair qu'on ne peut trouver de méthode abrégée pour

les réduire au Parallélipipéde. Il faut nécessairement les décomposer en parties, c'est-à-dire, en Prismes & en Pyramides, que l'on mesurera l'une après l'autre pour faire un total de tous ces produits partiaux. Nous n'avons pas trouvé d'autre moyen de mesurer les Polygônes irréguliers de plus de quatre Côtés, qu'en les partageant en Quadrilatéres & en Triangles. Il est vrai que l'opération est plus facile sur une Surface que sur un Solide. Aussi ne peut-on souvent découvrir qu'à peu près la valeur de cette derniere espéce d'étendue, lorsqu'elle est irréguliere à un certain point.

Fig. 93. La Sphére ne nous donnera pas plus d'embarras que les autres Solides réguliers. Car elle est elle-même une Figure réguliere à facetes infiniment petites. Le total de la Sphére peut donc être considéré comme un amas de Pyramides égales, dont chacune a pour Base une de ces Faces infiniment petites; & pour Hauteur le Raïon de la Sphére. Je dis le Raïon; car il n'en est pas de la Sphére comme des autres Polyédres réguliers à facetes, dans lesquels la différence du Raïon droit au Raïon oblique est assignable : au lieu que dans la Sphére le Raïon droit ne peut différer de l'oblique que d'un infiniment petit du second ordre.

Il n'est pas possible de mesurer une de ces petites Pyramides en particulier, vû l'infinie petitesse de la Base. Il faut donc dire que, prises toutes ensemble, elles sont égales à une seule Pyramide, qui auroit pour Base toute la Surface de la Sphére, & le Raïon pour Hauteur : ou plutôt,

à un ſeul Cône dont la Hauteur ſeroit le Raïon de la Sphére, & qui auroit pour Baſe un Cercle quadruple du grand Cercle. Donc pour avoir la Solidité d'une Sphére il faut multiplier ſa Surface, ou le quadruple de ſon grand Cercle, par le tiers de ſon Raïon.

Nous avons vû que la Surface de la Sphére étoit à celle du Cylindre circonſcrit comme 2 est à 3. Il eſt ſingulier que ces deux Figures conſervent le même Rapport dans leur Solidité. Il eſt aiſé de le prouver. Pag. 424.

Le Cylindre eſt le produit de ſa Baſe (égale au grand Cercle de la Sphére inſcrite) par ſa Hauteur, c'eſt-à-dire, par le Diamétre de la Sphére. D'un autre côté, la Sphére eſt le produit de ſa Surface, c'eſt-à-dire, de quatre de ſes grands Cercles par le tiers de ſon Raïon, ou ce qui eſt la même choſe, par le ſixiéme de ſon Diamétre. Fig. 94.

Réduiſons ce dernier produit. Quatre grands Cercles de la Sphére multipliés par le ſixiéme du Diamétre égalent deux grands Cercles multipliés par le tiers du Diamétre, ou un ſeul grand Cercle multiplié par les deux tiers du même Diamétre.

Ainſi, la Sphére ayant avec le Cylindre circonſcrit un Produiſant commun, ſçavoir, un grand Cercle; & un Produiſant inégal, ſçavoir, d'un côté les deux tiers du Diamétre, & de l'autre, le Diamétre entier, ou les trois tiers du Diamétre, ces deux Figures ſont entre elles comme leurs Produiſans inégaux, c'eſt-à-dire, comme $\frac{2}{3}$ eſt à $\frac{3}{3}$, ou comme 2 eſt à 3.

Liv. III. III. Sect. Chap. III. Pag. 425. Fig. 95.

Nous avons vû aussi le Rapport de la Surface de la Sphére au Quarré de son Diamétre. Il est naturel de chercher maintenant le Rapport de sa Solidité au Cube du même Diamétre.

Observons que ce Cube pourroit être circonscrit à la Sphére; & que ces deux Solides auroient six Points de commun, c'est-à-dire, que les Centres des six Faces du Cube seroient confondus avec six Points de la Surface de la Sphére.

Cela posé, considérons que les trois Produisans du Cube dont il s'agit, sont trois Diamétres de la Sphére. D'un autre côté, les trois Produisans de celle-ci sont, 1°. la Circonférence du grand Cercle. 2°. Le Diamétre. (ces deux premiers forment la Surface) 3°. Enfin le tiers du Raion, ou le sixiéme du Diamétre.

Et comme il est égal de multiplier la Circonférence entiere du grand Cercle par le sixiéme du Diamétre, ou le Diamétre entier par le sixiéme de cette Circonférence, nous pouvons dire que les trois Produisans de la Sphére sont deux Diamétres, & le sixiéme de la Circonférence du grand Cercle.

En comparant les Produisans de part & d'autre, nous voyons que les deux Solides ont deux Produisans communs, sçavoir, deux Diamétres & deux Diamétres. Donc la Sphére est à son Cube circonscrit comme les Produisans inégaux, c'est-à-dire, comme le sixiéme de la Circonférence de son grand Cercle, est à son Diamétre. Or ce sixiéme est un peu plus de moitié du Diamétre. Donc la Solidité de la Sphére est un peu plus de la moitié de celle du Cube circonscrit,

La Solidité de la Sphére étant ainsi trouvée, on découvrira assez aisément celle de ses parties.

1°. Il est évident que l'Hémisphére ayant la moitié de la Solidité de la Sphére entiere, est égale à un seul Cône, dont la Hauteur seroit le Raïon de la Sphére, & dont la Base seroit double du grand Cercle.

2°. Un Secteur de Sphére est un composé de Pyramides égales, dont les Bases infiniment petites composent la Surface de la Calote sphérique qui termine le Secteur, & dont la Hauteur est le Raïon de la Sphére. Il faut donc multiplier par le tiers de ce Raïon l'amas de toutes ces Bases, c'est-à-dire, la Surface sphérique de la Calote. Fig. 61.

3°. On trouvera de même la Solidité de la Calote ou Segment de la Sphére, si l'on y ajoute le Cône droit nécessaire pour en faire un Secteur. Après avoir pris la Solidité de ce Secteur, on retranchera du total la Solidité du Cône ajouté. Le reste sera la valeur du Segment. Il faut observer qu'on n'avoit aucun besoin de ce Cône subsidiaire pour avoir la Surface du Segment, & qu'il est nécessaire pour en trouver la Solidité. Fig. 61.

4°. La Couronne sphérique demande un peu plus de discution. Si nous supposons qu'elle soit terminée d'un côté par un grand Cercle de la Sphére, & qu'en ajoutant le Segment qui lui manque de l'autre côté, on en fît une Hémisphére, il faudra retrancher de la Solidité connue de l'Hémisphére, la valeur du Segment Fig. 58.

ajouté. Le reste sera la valeur de la Couronne solide.

Supposons maintenant que la Couronne soit prise dans l'Hémisphére, en-deça du grand Cercle, & qu'en ajoutant le Segment qui lui manque d'un côté, le total ne formât qu'un Segment plus grand; il faudroit prendre la valeur du Segment total, & retrancher celle du petit Segment ajouté. Le reste sera la valeur de la Couronne.

Supposons enfin, que le grand Cercle de la Sphére se trouve dans la Couronne: il faudra ajouter de part & d'autre les deux Segmens nécessaires pour achever la Sphére: ensuite retrancher de la Solidité de la Sphére entiere la valeur des deux Segmens ajoutés. Le reste donnera la valeur de la Couronne.

C'est ainsi que par des moyens plus ou moins simples, plus ou moins compliqués, on vient à bout de réduire au Parallélipipéde droit toutes les autres espéces de Polyédres. Il seroit à souhaiter qu'on pût réduire au Cube le Parallélipipéde même, & par une suite nécessaire, tous les autres Solides. Mais la Géométrie élémentaire qui découvre si parfaitement le Quarré égal à tout Rectangle quelconque, ne peut trouver que par des approximations & par des opérations un peu méchaniques le Cube égal au Parallélipipéde droit.

Ce Problême revient à ce qu'on appelle *la Duplication du Cube*, dont la recherche a fait le désespoir des anciens & des modernes. Car il est évident que, comme il est très-aisé de faire un Quarré double d'un autre, on feroit aisé-

ment un Cube double d'un simple, si l'on avoit trouvé le moyen de transformer en Cube un Parallélipipéde droit, comme on transforme le Rectangle en Quarré.

CHAPITRE IV.

Comparaison de la Surface des Polyëdres avec leur Solidité.

Pag. 236.

NOus avons prouvé dans le Livre précédent, que les Périmétres des Polygônes n'étoient pas en proportion avec les espaces contenus. L'analogie nous conduit à penser que les Surfaces dont les Polyëdres sont environnés, ne sont pas non plus en proportion avec leur Solidité. Car les Surfaces sont aux Solides ce que les Lignes sont aux Surfaces.

Si l'on coupe un Cube par la moitié, chaque demi-Cube est terminé par deux Quarrés entiers & par quatre demi-Quarrés, c'est-à-dire, quatre Quarrés entiers. Cependant la Surface du Cube entier ne consistoit qu'en six Quarrés. Donc le demi-Cube a plus de Surface à proportion de sa Solidité, que le Cube entier.

On prouvera de même, que le demi-Cube a moins de Surface à proportion que le quart de Cube : le quart de Cube, moins que le demi-quart, & ainsi à l'infini. D'où nous devons tirer cette vérité générale très-importante dans la Physique, que *plus un Solide est petit, & plus à*

proportion il a de Surface. Il est inutile d'apporter d'autres preuves d'une vérité si claire; mais il ne le sera pas de comparer les diverses espéces de Polyëdres, pour sçavoir quels sont ceux qui renferment plus d'espace sous une moindre superficie.

1.

LEs Prismes inclinés sont égaux aux Prismes droits de même Base & de même Hauteur; mais les inclinés ont plus de Surface. L'inspection seule de la Figure suffit pour le démontrer. Car les Bases dans les droits & dans les inclinés sont égales; mais les Faces environnantes inclinées sur les Bases du Prisme, sont plus grandes que les perpendiculaires. Les Prismes doivent être à l'égard de leur superficie, ce que les Parallélogrammes sont à l'égard de leur Périmétre. Or il est manifeste que le Périmétre des Parallélogrammes inclinés est plus grand que celui des Rectangles de même Base & de même Hauteur.

Fig. 81.

Fig. 79, 80.

La Surface d'une Pyramide droite est un peu plus de la moitié de la Surface du Prisme droit de même Base & de même Hauteur. Il seroit difficile de déterminer le rapport juste de la Surface de la Pyramide inclinée avec celle du Prisme incliné; parceque l'infinie variabilité de l'inclinaison doit varier les Rapports; mais il est assez clair qu'une Pyramide inclinée à plus de Surface, qu'une Pyramide droite de même Base & de même Hauteur.

2.

Fig. 85.

DE tous les Prismes, le triangulaire est celui qui sous une égale Surface contient moins de So-

lidité; & le Cylindre, celui qui en contient davantage.

Nous avons prouvé dans le Livre précédent, que de tous les Polygônes, le Triangle est celui qui sous le même Périmétre contient le moins d'espace; & que le Cercle est celui qui en contient davantage. D'où nous avons conclu qu'en supposant les Polygônes de même étendue, le Triangle a le plus grand Périmétre; & le Cercle, le plus petit. Cela est fondé sur la nature des Angles, qui renferment d'autant plus d'espace qu'ils sont plus obtus, & qui en renferment d'autant moins qu'ils sont plus aigus. Or les Angles du Triangle tiennent beaucoup de l'aigu. Car si l'on fait l'un d'entre eux obtus, ce ne peut être qu'aux dépens des deux autres, qu'on aiguise tellement, qu'à peine vers l'extrémité contiennent-ils un espace sensible.

Soient donc deux Bases prismatiques, l'une triangulaire & l'autre quadrangulaire, dont le Périmétre soit égal. Il est certain, ainsi qu'on vient de le dire, que le premier Polygône contiendra moins d'espace que le second.

Maintenant, si par le mouvement des deux Bases élevées à la même Hauteur, on construit deux Prismes droits, il en résultera que les Faces environnantes des deux Prismes formés par la répétition des Périmétres des Bases, sont égales; & que la Surface entiere des deux Prismes seroit parfaitement la même, si la Base quadrangulaire n'étoit pas plus grande que la triangulaire. La Surface du Prisme quadrangulaire est donc un peu plus grande que celle du triangulaire, &

cet excédent eſt la différence des Baſes priſe deux fois.

Mais pendant que les Faces environnantes des Priſmes ſont formées par la répétition du Périmétre des Baſes, leur Solidité eſt produite par la répétition de l'eſpace que ces Baſes renferment. Cet eſpace eſt plus grand dans la Baſe quadrangulaire que dans la triangulaire. Il y a d'ailleurs autant de Tranches dans un Priſme que dans l'autre. Par conſéquent, le Priſme quadrangulaire aura plus de Solidité que le triangulaire; & cet excédent de Solidité ſera la différence des deux Baſes priſe, non pas deux fois, mais autant de fois qu'il y a de Tranches dans les Priſmes, c'eſt-à-dire, une infinité de fois.

Ainſi, en comparant les deux Priſmes, le quadrangulaire ne l'emporte en Surface ſur l'autre que de très-peu; au lieu qu'il l'emporte de beaucoup par la Solidité.

Retournons maintenant la ſuppoſition. Soient les deux Baſes priſmatiques égales du côté de l'eſpace. La triangulaire aura un Périmétre plus grand que la quadrangulaire. Si donc on éléve ces Baſes à la même Hauteur pour conſtruire les deux Priſmes, il en réſultera 1°. que les deux Priſmes auront la même Solidité. 2°. Que les Faces environnantes formées par la répétition du Périmétre triangulaire ſeront plus grandes que les Faces qui ſeront formées par une égale répétition d'un Périmétre quadrangulaire plus petit. Donc toute proportion gardée, le Priſme triangulaire a plus de Surface & moins de Solidité que le quadrangulaire. Donc par la

même raison, celui-ci a plus de Surface & moins de Solidité que le pentagonal, que l'exagonal; & ainsi de suite à l'infini. Donc *de tous les Prismes, le Cylindre est celui qui, toute proportion gardée, renferme plus de Solidité sous une moindre Surface.*

Ce que nous venons d'établir par rapport aux Prismes, s'applique de soi-même aux Pyramides, sans qu'il soit besoin de nouvelles preuves. Ainsi, *de toutes les Pyramides, la triangulaire est celle qui, toute proportion gardée, contient moins de Solidité sous une plus grande Surface; & le Cône, plus de Solidité sous une Surface plus petite.*

3.

EN comparant les Prismes aux Pyramides, il est clair qu'il n'y a point de proportion entre leur Surface & leur Solidité; c'est-à-dire, que les Prismes ont plus de Solidité que de Surface, & les Pyramides plus de Surface que de Solidité.

Car nous avons prouvé 1°. que la Surface d'un Prisme droit n'est pas tout-à-fait double de la Surface d'une Pyramide droite de même Base & de même Hauteur. Et 2°. que ce Prisme est triple de la Pyramide quant à la Solidité, c'est-à-dire, que leur Surface n'étant pas tout-à-fait comme 2 à 1, leur Solidité est cependant comme 3 à 1.

4.

LA Sphére devant être regardée comme un Cercle solide, l'analogie nous conduit à penser, que *de tous les Polyëdres, la Sphére est celui qui renferme plus de Solidité sous une moindre Surface.*

Pour nous en convaincre, comparons-la d'abord avec le Cylindre le plus solide de tous les Prismes. Nous avons vû que le Cylindre circonscrit étoit à la Sphére inscrite comme 3 est à 2, tant du côté de la Surface que de la Solidité. Mais si nous coupons ce Cylindre en deux parties égales par une Tranche parallele aux Bases, chaque moitié aura une Surface égale à celle de la Sphére. Car la Surface courbe de ce demi-Cylindre est égale à deux grands Cercles de la Sphére, ausquels si l'on joint les Cercles des deux Bases, on aura quatre grands Cercles, valeur de la Surface de la Sphére.

Mais ce demi-Cylindre n'a pas la Solidité de la Sphére. Car ses Produisans sont 1°. un grand Cercle. 2°. Le Raïon de la Sphére, ou les $\frac{3}{6}$ de son Diamétre. Les Produisans de la Sphére sont 1°. un grand Cercle. 2°. Les $\frac{4}{6}$ du Diamétre. Donc ces Solides sont entre eux comme $\frac{3}{6}$ est à $\frac{4}{6}$, ou, comme 3 est à 4. Donc la Solidité de la Sphére surpasse d'un quart celle du demi-Cylindre, quoique leurs Surfaces soient égales.

Si l'on vouloit rendre le Cylindre circonscrit égal à la Sphére en Solidité, il faudroit en retrancher le tiers par une section parallele à la Base; puisque le Cylindre est à la Sphére comme 3 est à 2. Mais ce Cylindre ainsi réduit auroit plus de Surface que la Sphére; puisqu'outre les deux Cercles des Bases, on a les deux tiers de la Surface courbe du Cylindre circonscrit, qui vaut plus de deux grands Cercles de la Sphére. Donc *toute proportion gardée, la Sphére a plus de Solidité & moins de Surface que le Cylindre.*

Comparons maintenant la Sphére à celui des Polyëdres à facetes qui paroît avoir plus de Solidité, c'est-à-dire, à l'Icosaëdre régulier; & supposons que les vingt Faces triangulaires de celui-ci, prises ensemble, soient égales à la Surface d'une Sphére. Je dis que celle-ci a plus de Solidité, & je le prouve.

Les Produisans de l'Icosaëdre sont 1°. sa Surface. 2°. Le tiers du Raïon droit; & les Produisans de la Sphére sont 1°. sa Surface. 2°. Le tiers de son Raïon. La Surface de part & d'autre est supposée égale. Par conséquent, les deux Solides sont entre eux comme leur second Produisant, c'est-à-dire, comme le Raïon droit de l'Icosaëdre est au Raïon de la Sphére. Or le Raïon de la Sphére est plus grand que le Raïon droit de l'Icosaëdre. Car ces deux Raïons ne pourroient être égaux qu'en supposant que l'Icosaëdre pourroit être circonscrit à la Sphére. Mais s'il étoit circonscrit à la Sphére, sa Surface seroit plus grande que celle de la Sphére. Donc le Raïon de la Sphére est plus grand que le Raïon droit de l'Icosaëdre. Donc la Sphére sous une égale Surface l'emporte en Solidité.

Rappellons-nous un principe lumineux dont nous avons fait beaucoup d'usage par rapport aux Polygônes. Nous avons observé que plus les Angles étoient aigus, & moins ils renfermoient d'espace; & qu'au contraire ils en contenoient d'autant plus, qu'ils étoient plus obtus. De-là nous avons conclu que de tous les Polygônes, le Triangle étoit celui qui renfermoit le moins d'espace relativement à la grandeur de son Pé-

rimétre; & le Cercle au contraire, celui qui en contenoit davantage, attendu que les Angles dont il eſt enveloppé dans ſa Circonférence, ſont infiniment obtus.

Il en eſt de même par rapport aux Polyëdres. Plus un Angle ſolide eſt aigu, & moins il contient d'étendue; & n'en contient jamais davantage, que lorſqu'il eſt extrêmement obtus. De-là vient le peu de Solidité des Pyramides relativement aux Priſmes de même Baſe & de même Hauteur. De-là la Solidité du Cylindre au-deſſus des autres Priſmes, & ſur-tout du triangulaire. De-là enfin la Solidité de la Sphére au-deſſus de tous les autres Polyëdres. Car les Angles ſolides dont la Sphére eſt environnée, & dont les Sommets forment ſa Surface, ſont infiniment obtus, c'eſt-à-dire, infiniment près de la valeur de quatre Angles-droits-plans.

On pourroit peut-être penſer que le *Cylindre* doit être dans le même cas à raiſon de ſa Courbure circulaire. Mais quoiqu'il ſoit par cette raiſon plus ſolide que les autres Priſmes, cependant il faut obſerver que ſa Surface courbe ne ſe joint à la Surface des deux Baſes que par un Angle droit, ſi le Cylindre eſt droit, ou par des Angles moitié aigus, moitié obtus, s'il eſt incliné; & que cette jonction ſous des Angles médiocres ne lui fait gagner du côté de la Surface, qu'au détriment de la Solidité. La Sphére n'a point de pareils Angles; & c'eſt ce qui la rend le plus ſolide de tous les Polyëdres.

QUATRIÉME SECTION.

Les Solides semblables.

NOus avons déja développé dans ce troisiéme Livre les Rapports que plusieurs Solides ont entre eux. Il est en effet impossible de traiter un peu à fond quelque point de Géométrie sans comparer les Figures les unes aux autres; & cette comparaison produit nécessairement la connoissance des Rapports. Il s'agit ici de s'élever au-dessus des Rapports particuliers, & d'établir des régles générales qui conviennent à tous les Polyëdres que l'on voudra comparer.

Lorsque nous avons traité des Rapports entre les Polygônes, nous les avons considérés d'abord suivant leur Périmétre; & ensuite selon l'espace qu'ils renferment. L'ordre sembleroit demander que nous considérassions aussi les Rapports des Polyëdres, d'abord quant à la Surface qui les environne, & ensuite quant à l'étendue renfermée dans cette Surface.

Mais la superficie des Solides n'est pas d'une nature différente de celle que nous avons examinée dans le Livre précédent. Les Polyëdres sont couverts d'un amas de Polygônes dont le développement donne une Figure superficielle quelconque. Et l'on peut chercher les Rapports qui se trouvent entre les divers développemens par les régles établies dans le Livre précédent, Sect. III. Nous n'envisagerons donc les Polyëdres que selon leur Solidité,

CHAPITRE PREMIER.

Observations générales sur le Rapport des Polyëdres.

TOute *Figure est égale au produit de ses Produisans*. C'est un principe général commun aux Polygônes & aux Solides. Mais les Polygônes n'ont que deux Produisans, & les Solides en ont trois, ce qui donne lieu a plus de combinaisons.

Il est clair que les Solides ont trois Produisans. Car pour construire un Polyëdre, il faut d'abord multiplier une Ligne par une autre, ce qui donne une Surface; & ensuite multiplier cette Surface par une troisiéme Ligne. Mais souvent on réduit à deux les trois Produisans d'un Polyëdre: sçavoir, à la Surface qui sert de Base, & à la Ligne de Hauteur, par laquelle la Base est multipliée. Alors on regarde la Base comme un seul Produisant, qui renferme la Longueur & la Largeur de la Figure.

C'est ainsi que nous en avons usé jusqu'à présent, & qu'on en doit user pour abréger, toutes les fois qu'il ne s'agit que d'évaluer la Solidité d'un Polyëdre. Lorsque l'on n'a point d'autre but, à quoi serviroit-il de faire attention à la valeur précise des deux Dimensions de la Base? on n'a besoin que de connoître l'espace qu'elle renferme, pour le multiplier par la Ligne de Hauteur. Or la même quantité d'espace peut

être contenue dans des Polygônes d'une infinité de formes différentes, qui sont toutes égales pour la production de la Solidité. Ainsi, dès qu'on en a le résultat, la considération de la Longueur & de la Largeur particuliere de la Figure ne feroit que distraire sans aucun fruit.

Mais lorsqu'il s'agit de trouver le Rapport des Solides entre eux, il est souvent nécessaire de comparer les trois Produisans de l'un aux trois Produisans de l'autre. Nous allons les examiner sous cette double vûe, pour en recueillir les Rapports résultans. Commençons par les considérer comme le produit de deux Produisans.

On voit d'abord que *deux Polyëdres quelconques sont entre eux en Raison composée de la Base à la Base, & de la Hauteur à la Hauteur.*

Car comparant la Base du premier à la Base du second; & la Hauteur du premier à la Hauteur du second, on a deux Raisons quelconques, dont les Produisans du premier sont les Antécédens; & les Produisans du second, les Conséquens. Or le premier Solide est égal au produit des deux Antécédens; & le second, au produit des deux Conséquens. Donc la Raison de ces deux Polyëdres est composée des Raisons simples de la Base à la Base, & de la Hauteur à la Hauteur.

Il faut observer que la Hauteur entiere est un Produisant dans le Prisme; & que dans la Pyramide & les autres Polyëdres que l'on réduit à la Pyramide, ce n'est que le tiers de la Hauteur. C'est à quoi il faut avoir attention lorsque

l'on compare la Solidité du Prisme à celle de la Pyramide; car s'il ne s'agissoit que de comparer Pyramide à Pyramide, il ne seroit pas nécessaire d'y regarder de si près, étant évident que les Hauteurs entieres des Pyramides sont en même Raison que leur tiers.

Cela posé, il suit du principe que nous venons d'établir sur la Raison composée, 1°. que *deux Solides quelconques, deux Parallélipipédes, par exemple, ayant des Bases égales, sont entre eux comme leur Hauteur; ou comme leur Base, s'ils ont des Hauteurs égales.*

Fig. 96. Soient deux Prismes ayant chacun une Base de 18 Pieds quarrés. Soit la Base du premier multipliée par 4 Pieds de Hauteur; & la Base du second, par 2. Il est évident que le premier, produit de l'égalité par le double, est double du second, produit de l'égalité par le simple. 72. 36::4.2.

Fig. 97. Il en sera de même si la Hauteur étant égale, les Bases sont d'une Grandeur différente, par exemple, 12 & 6. Car il est évident que 12×4 est double de 6×4. Car 48.24::12.6.

2°. *Lorsque la Base & la Hauteur d'un Polyédre sont réciproques à la Base & à la Hauteur d'un autre Polyédre, les deux Solides sont égaux.* Car alors les deux Produisans du premier sont les Extrêmes d'une Proportion géométrique, dont les Produisans du second sont les Moyens.

Fig. 98. Soit la Base d'un Parallélipipéde, 8; la Hauteur, 6: la Base d'un autre Parallélipipéde, 12; & la Hauteur, 4. Si l'on compare la Base du premier à la Base du second; & ensuite la Hau-

teur

teur du ſecond à la Hauteur du premier, on aura 8 · 12 : : 4 · 6, c'eſt-à-dire, 12×4=8×6. Donc le produit des Produiſans de chaque Parallélipipéde étant égal, les deux Parallélipipédes le ſont auſſi.

2°. *Lorſque les Baſes de deux Polyëdres ſont proportionnelles à leur Hauteur*, c'eſt-à-dire, lorſque la Baſe du premier eſt à la Baſe du ſecond, comme la Hauteur du premier eſt à la Hauteur du ſecond, *les Polyëdres ſont en Raiſon doublée de leur Baſe & de leur Hauteur.* Car la Raiſon compoſée de deux Raiſons égales eſt une Raiſon doublée.

Ayant deux Priſmes dont la Baſe du premier eſt 12, & la Hauteur 6 : la Baſe du ſecond, 8; & la Hauteur, 4. J'ai la Proportion : 12 · 8 : : 6 · 4. Les deux Raiſons compoſantes étant égales, la Raiſon compoſée 72 à 32 eſt doublée; & ſon Expoſant 2+ $\frac{1}{4}$ eſt un nombre quarré, dont la Racine eſt 1+ $\frac{1}{2}$, Expoſant des Raiſons ſimples. Fig. 92.

Il ſuit de-là que *ces deux Priſmes ſont entre eux comme les Quarrés de leurs Hauteurs ou de leurs Baſes.*

Car les deux Raiſons ſimples étant égales, & par conſéquent grandeurs égales, peuvent ſe ſubſtituer l'une à l'autre, ſans changer la Proportion. Ainſi au lieu de

12 · 8 : : 6 · 4.

Je puis dire : 12 · 8 : : 12 · 8.

Ou bien : 6 · 4 : : 6 · 4.

La Raiſon compoſée de la premiere Proportion

eſt 72 à 32. Celle de la ſeconde, 144 à 64: celle de la troiſiéme, 36 à 16. Or 72 · 32 :: 144 · 64 :: 36 · 16. Donc les deux Priſmes ſont comme les Quarrés de leur Baſe ou de leur Hauteur.

Ceci néanmoins mérite quelque explication. On ne ſera point ſurpris d'entendre parler du Quarré de la Hauteur des Priſmes; car cette Hauteur eſt une Ligne très-propre à devenir une Racine quarrée. Mais qu'eſt-ce que le Quarré d'une Baſe? On peut multiplier un Polygône par une Ligne, & le produit eſt un Solide. Mais pour multiplier un Polygône par lui-même, il faudroit ſuppoſer plus de trois Dimenſions dans l'étendue.

Mais ne nous effrayons pas. Lorſque l'on compare deux Polygônes pour juger de leur eſpace reſpectif, on eſt obligé de les partager en unités fictices de même grandeur, en Quarrés, par exemple, d'un Pied, d'un Pouce, &c. & l'on compare le nombre de ces Quarrés contenus dans un des Polygônes au nombre de Quarrés contenus dans l'autre; par exemple, 12 Quarrés à 8 Quarrés, leſquels ſont cenſés Grandeurs linéaires, c'eſt-à-dire, rangés ſur une ſeule Ligne, quand il s'agit d'en faire des Racines de Quarrés.

Ainſi, lorſqu'on dit que deux Priſmes ſont entre eux comme les Quarrés de leurs Baſes 12 & 8, on entend qu'ils ſont entre eux comme le Quarré compoſé de 144 petits Quarrés pareils aux unités fictices des Baſes, ſeroit à un autre Quarré compoſé de 64 petits Quarrés de même grandeur.

Considérons maintenant les Polyëdres comme formés par le produit de trois Produisans; & voyons ce qui doit résulter de leur comparaison.

Nous partirons toujours du même principe, sçavoir, que *deux Polyëdres sont entre eux comme le produit de leurs trois Produisans*, c'est-à-dire; en Raison composée de la Longueur à la Longueur, de la Largeur à la Largeur, & de la Profondeur à la Profondeur. Car en multipliant les Antécédens de ces trois Raisons, on a le premier Polyëdre; & le second, en multipliant les Conséquens.

D'où il suit 1°. que deux Polyëdres qui ont un Produisant commun, sont entre eux comme le produit des deux autres; ou comme leurs Produisans inégaux, s'ils en ont deux égaux.

Soient deux Prismes, dont le premier ait 4 de Longueur, 3 de Largeur & 4 de Profondeur: & le second, 3 de Longueur, 2 de Largeur & 4 de Profondeur. Ces deux Prismes n'ayant de commun que la Profondeur 4, sont entre eux comme le produit de leurs deux premiers Produisans, c'est-à-dire, comme 12 est à 6. Car le produit des trois Produisans du premier est 48, & du second, 24. Or 48 · 24 :: 12 · 6. Fig. 97.

Soient encore deux Prismes, dont le premier ait 6 de Longueur, 3 de Largeur & 4 de Profondeur; & le second, 6 de Longueur, 3 de Largeur & 2 de Profondeur. Ces deux Prismes sont comme leurs Produisans inégaux, c'est-à-dire, comme 4 est à 2. Car le produit des trois Fig. 96.

Produisans du premier est 72; & du second, 36. Or 72 · 36 :: 4 · 2.

2°. *Lorsque les trois Produisans d'un Polyëdre sont proportionnels aux trois Produisans d'un autre, les deux Polyëdres sont entre eux en Raison triplée de leurs Produisans homologues.* Car la Raison de la Longueur de l'un à la Longueur de l'autre, étant égale à la Raison de la Largeur à la Largeur, & de la Profondeur à la Profondeur, la Raison composée de ces trois Raisons simples est une Raison triplée.

D'où il suit que *les deux Polyëdres sont entre eux comme les Cubes de leurs Produisans homologues.* Car les trois Raisons étant trois grandeurs égales, peuvent être substituées les unes aux autres sans aucun changement réel.

Fig. 100. Soit un Prisme dont la Longueur soit 6, la Largeur 3, & la Profondeur 12. Soit un autre Prisme dont la Longueur soit 4, la Largeur 2, & la Profondeur 8, il est évident que les Produisans du premier sont proportionnels aux Produisans homologues du second. Car

6 · 4 :: 3 · 2 :: 12 · 8.

On peut donc substituer à ces trois Raisons égales, la même Raison arrangée de même en Proportion continuée, & dire :

6 · 4 :: 6 · 4 :: 6 · 4.

ou bien : 3 · 2 :: 3 · 2 :: 3 · 2.

ou bien : 12 · 8 :: 12 · 8 :: 12 · 8.

La Raison composée des trois dernieres formules seroit une Raison de Cube à Cube. Or cette

Raiſon ſeroit la même que la Raiſon triplée de la formule ordinaire. Car :

216 . 64 :: 27 . 8 :: 1728 . 512.

Dont l'Expoſant commun 3 + ⅜ eſt un nombre cubique, produit de 1 + ½ Expoſant des Raiſons ſimples, multiplié deux fois par lui-même.

Donc *les deux Priſmes ſont entre eux comme les Cubes de leurs Produiſans homologues.*

Les Commençans ſont quelquefois ſurpris & même embaraſſés, lorſqu'ils liſent dans les Elémens de Géométrie que les Polyëdres dont les Produiſans homologues ſont proportionnels, ſont comme les Quarrés de ces mêmes Produiſans ; & d'autres fois, qu'ils ſont comme les Cubes. Ils ſoupçonnent une contradiction dans ce double langage, & ſont tentés de regarder comme des paralogiſmes les preuves dont on appuye ces deux aſſertions.

Il y auroit en effet une véritable contradiction, ſi l'on diſoit des mêmes Polyëdres, qu'ils ſont comme les Quarrés de leurs Hauteurs, & comme les Cubes de ces mêmes Hauteurs. Car la différence de ces deux Raiſons eſt énorme. Mais il faut avoir grand ſoin de diſtinguer les occaſions où il eſt à propos de conſidérer les Polyëdres comme s'ils n'avoient que deux Produiſans, & celles où l'on doit conſidérer les trois ſéparément. Ce n'eſt que dans le premier cas que l'on dit, que les Polyëdres ſont comme les Quarrés, lorſque les Hauteurs ſont proportionnelles aux Baſes : & ce n'eſt que dans le ſecond cas, que les Polyëdres, dont les trois Pro-

duiſans ſont proportionnels, ſont comme les Cubes. A quoi il faut ajouter pour achever d'ôter toute équivoque, que dans les premiers Polyëdres, les Produiſans des Baſes ne ſont pas proportionnels, quoique les Baſes ſoient proportionnelles aux Hauteurs; & que dans les ſeconds, les Baſes ne ſont pas proportionnelles aux Hauteurs. Des exemples rendront ceci plus ſenſible.

Fig. 99. J'ai deux Solides, dont l'un a pour Baſe 12, & 6 pour Hauteur: & l'autre 8 de Baſe & 4 de Hauteur. Il eſt aiſé de voir que les Baſes ſont proportionnelles aux Hauteurs. Car 12·8::6·4. Donc les deux Priſmes conſidérés comme le produit de deux Produiſans ſont entre eux en Raiſon doublée, & par conſéquent comme les Quarrés de leurs Produiſans homologues.

Mais les Produiſans des Baſes ne ſont pas proportionnels entre eux, ni avec les Hauteurs des Priſmes. Car 4 Longueur du premier, n'eſt pas à 4 Longueur du ſecond, comme 3 Largeur du premier eſt à 2 Largeur du ſecond, ni comme 6 Hauteur du premier eſt à 4 Hauteur du ſecond. Par conſéquent, les deux Priſmes n'ayant pas leurs trois Produiſans homologues proportionnels, ne peuvent jamais être comme les Cubes de ces mêmes Produiſans.

Fig. 100. Suppoſons maintenant deux Priſmes dont les trois Produiſans ſoient proportionnels; que par exemple, 6 Longueur du premier ſoit à 4 Longueur du ſecond, comme 3 Largeur du premier eſt à 2 Largeur du ſecond, & comme 12 Hauteur du premier eſt à 8 Hauteur du ſecond. Ces deux Priſmes ſont en Raiſon triplée, & par

conséquent comme les Cubes de leurs Produisans homologues.

Mais si l'on s'avisoit de les considérer comme le produit de deux Produisans, c'est-à-dire, de la Base par la Hauteur, les deux Produisans du premier ne seroient pas proportionnels aux deux Produisans du second. Car 18 Base du premier n'est pas à 8 Base du second, comme 12 Hauteur du premier est à 8 Hauteur du second. Par conséquent, ces deux Prismes considérés avec deux Produisans, ne peuvent jamais être comme les Quarrés de ces mêmes Produisans.

Il ne répugne donc en aucune sorte, que deux Polyëdres soient entre eux comme les Quarrés de leurs Bases & de leurs Hauteurs; & que deux autres tout différens soient comme les Cubes de leurs Longueurs, de leurs Largeurs, & de leurs Profondeurs.



CHAPITRE II.

Rapport des Polyëdres semblables.

DEux Polyëdres peuvent être parfaitement égaux sans être semblables, une Pyramide, par exemple, & une Sphére. Ils peuvent aussi être parfaitement semblables sans être égaux, deux Sphéres, par exemple, d'inégale grandeur.

Mais la ressemblance entre les Polyëdres peut être plus ou moins parfaite. Un Cylindre, par exemple, ressemble plus à un Cylindre quelconque qu'au Prisme triangulaire, quoiqu'il ressemble plus à celui-ci qu'à la Pyramide. Il ne s'agit ici que de la parfaite ressemblance.

Après l'idée que nous en avons tracée dans le Livre précédent, nous pouvons nous dispenser de nous étendre sur ce sujet. Mais comme les Polyëdres sont plus composés que les Polygônes, la parfaite similitude des premiers exige plus de conditions. Il est nécessaire de les détailler.

1°. Il faut que les deux Polyëdres que l'on compare soient de la même classe, du même genre, de la même espéce. Un Prisme & une Pyramide ne sont pas des Figures semblables, non plus qu'un Parallélipipède & un Cylindre, ou bien un Prisme pentagonal & un exagonal.

2°. Il faut que deux Polyëdres de la même espéce soient droits, ou que tous deux aient la même inclinaison.

3°. Qu'ils ſoient terminés par le même nombre de Faces ; & que chaque Face de l'un ſoit parfaitement ſemblable à la Face correſpondante de l'autre.

4°. Que les deux Polyëdres aient le même nombre d'Angles ſolides ; & que chaque Angle de l'un ſoit égal à l'Angle correſpondant de l'autre ; c'eſt-à-dire, qu'il ſoit formé par le même nombre d'Angles-plans dans l'un & dans l'autre Polyëdre ; & que chacun de ces Angles-plans ſoit égal à l'Angle-plan correſpondant.

5°. Que les trois Produiſans des deux Polyëdres ſoient proportionnels, c'eſt-à-dire, qu'il y ait même Raiſon de la Longueur du premier à la Longueur du ſecond, de la Largeur à la Largeur, de la Profondeur à la Profondeur.

6°. Enfin, que toutes les Lignes ſemblablement tirées dans les deux Polyëdres ſoient proportionnelles aux Lignes qui expriment les Produiſans. Car il eſt évident que la ſimilitude parfaite dépend de l'exacte Proportion ſcrupuleuſement obſervée dans les plus petites parties des Figures. Il eſt inutile de démontrer au long que dans les Figures ſemblables les Produiſans homologues & les Lignes ſemblablement tirées ſont en Proportion. Il faudroit autant prouver que les Figures ſemblables doivent ſe reſſembler.

On a vû dans le Livre précédent, que les Polygônes réguliers ſont ſemblables à tous ceux de leur claſſe. La raiſon en eſt ſenſible : ces Polygônes ſont tellement uniformes qu'un ſeul Côté & un ſeul Angle déterminent leur conſtruction, ſans qu'elle puiſſe varier. Ayant deux

Liv. III. IV. Sect. Chap. II.

Lignes inégales, si j'en veus faire deux Triangles équilatéraux, les Côtés qui suivront dans chaque Triangle seront égaux à celui qu'on a pris pour modéle; & les Angles seront nécessairement dans l'un & dans l'autre Triangle, chacun de 60 Degrés. Par conséquent, le même Rapport qui étoit entre les deux premieres Lignes se conservera entre les Côtés subséquens.

Par la même raison, tous les Polyëdres réguliers sont semblables à ceux de leur classe: les Tétraëdres aux Tétraëdres; les Exaëdres aux Exaëdres; les Octaëdres aux Octaëdres; les Dodécaëdres aux Dodécaëdres; les Icosaëdres aux Icosaëdres; enfin les Sphéres aux Sphéres. Tous leurs Angles sont les mêmes; & les Raïons obliques sont égaux dans chaque Figure, aussi-bien que les Raïons droits.

Si je veux construire deux Tétraëdres réguliers avec deux Lignes de grandeur *inégale*, je fais d'abord deux Triangles équilatéraux: ensuite je joins à chacun d'eux trois autres Triangles de même grandeur que le premier. Voilà les deux Tétraëdres construits; & chacun d'eux sera tellement déterminé dans sa forme, qu'il seroit impossible de lui en donner une autre.

De même, ayant deux Lignes différentes prises pour Raïons de deux Sphéres, ces deux Polyëdres seront tellement décidés à être d'une certaine façon, que chaque Sphére ne peut être ni plus grande ni plus petite. Donc toutes les Sphéres sont des Figures semblables.

En général, ces Figures ont cela de commode, que leur seule régularité suffit sans autre

examen, pour juger qu'elles ont toutes les conditions requises pour être semblables à celles de leur espéce. Mais on sçait qu'il y a moins de Figures régulieres parmi les Solides que parmi les Polygônes. Cependant la plus grande irrégularité n'est pas un obstacle à la plus parfaite ressemblance; parce que deux Polyëdres, quelques irréguliers qu'ils soient, peuvent réunir toutes les conditions spécifiées ci-dessus.

Nous avons encore vû dans le Livre précédent, que les Polygônes semblables pouvoient être considérés, ou selon leur Périmétre, ou selon l'espace contenu; & que cette double considération formoit entre eux des Rapports différens. Nous avons prouvé que sous la premiére vûe ils étoient comme les Côtés homologues de leurs Périmétres, ou comme les Lignes semblablement tirées dans leur capacité: & que considérés sous le second point de vûe, ils étoient comme les Quarrés de ces mêmes Côtés homologues ou de ces mêmes Lignes semblablement tirées.

L'analogie nous fait découvrir ce double point de vûe dans les Solides semblables. Car les Surfaces dont ils sont environnés sont à leur égard ce qu'est le Périmétre à l'égard des Polygônes. On peut donc considérer les Polyëdres semblables ou selon les Surfaces environnantes, ou selon l'espace qu'elles renferment.

Sous le premier aspect, les Polyëdres semblables sont entre eux comme les Surfaces environnantes homologues. Or ces Faces sont entre elles comme les Quarrés de leurs Côtés

LIV. III. IV. SECT. CHAP. II.

homologues. De plus, le développement de ces Surfaces, donne des Figures planes semblables, qui sont entre elles comme les Quarrés de leurs Périmétres, ou des parties correspondantes de leurs Périmétres. Ainsi, à cet égard la similitude des Polyëdres ne différe en rien de la similitude des Polygônes; & comme nous avons amplement traité de celle-ci dans le Livre précédent, il seroit fort inutile d'y revenir.

Il ne nous reste donc plus qu'à considérer les Polyëdres semblables sous le second aspect, c'est-à-dire, selon l'espace contenu dans cette espéce de Boëte formée par les Surfaces environnantes. Or l'analogie nous conduit à penser, que les Polygônes semblables étant entre eux comme les Quarrés de leurs Produisans homologues, *les Polyëdres semblables doivent être comme les Cubes.*

Fig. 100. Car les Produisans de deux Polyëdres semblables étant proportionnels, il y a même Raison de la Longueur à la Longueur, de la Largeur à la Largeur, & de la Profondeur à la Profondeur. Or une Raison composée de trois Raisons égales, est une Raison triplée; & par conséquent les produits sont entre eux comme les Cubes des termes d'une des Raisons simples.

De plus, les Lignes semblablement tirées dans les Polyëdres semblables, sont proportionnelles aux Produisans. Donc *les Polyëdres semblables sont entre eux comme les Cubes de leurs Produisans homologues & de leurs autres Lignes semblablement tirées.*

Il faut remarquer que la Converse de cette

Conclusion ne seroit pas véritable. Car on peut imaginer des Polyëdres, qui, sans être semblables, seroient néanmoins entre eux comme les Cubes de leurs Produisans homologues. Supposons, par exemple, deux Parallélipipédes, l'un droit & l'autre incliné, dont les Bases soient des Parallélogrammes semblables. Les deux premiers Produisans de l'un seroient déja par conséquent proportionnels aux deux Produisans de l'autre. Supposons encore que les Hauteurs de ces deux Polyëdres soient aussi en Proportion avec les Longueurs & les Largeurs des Bases : il est évident que ces deux Parallélipipédes, qui ne sont nullement des Figures semblables, sont néanmoins entre eux comme les Cubes de leurs Produisans homologues. C'est que la Proportion des Produisans, nécessaire à la similitude des Figures, n'est pas la seule condition qui soit essentielle. Elle peut donc appartenir à des Polyëdres nullement semblables, qui n'auroient pas les autres conditions requises pour la similitude parfaite.

(*a*) La différence de Solidité qui se trouve entre deux Polyëdres qui seroient entre eux comme les Cubes de leurs Produisans homologues est si considérable, qu'elle étonne l'imagination. Il est par conséquent à propos de se la rendre familiere, pour éviter les méprises où l'on pourroit aisément tomber.

(*a*) Ce qui suit jusqu'à la fin, est tiré presque mot à mot de l'Abrégé des Elémens de Géométrie de M. Rivard célébre Professeur de Philosophie dans l'Université de Paris. Voyez pag. 212. & suiv.

Quand il s'agit des Surfaces semblables, un Produisant double, triple, &c. donne une Surface quadruple, nonécuple, &c. parceque les Surfaces sont entre elles comme les Quarrés. Mais les Polyëdres semblables étant comme les Cubes, un Produisant double, donne un Solide huit fois plus grand : un Produisant triple, donne un Solide 27 fois plus grand : un Produisant quadruple donne un Solide 64 fois plus grand; & ainsi de suite, selon l'ordre des Cubes numéraires.

Les Cubes, par exemple, sont des Polyëdres semblables. Je compare donc un Pied & un Pouce cubique, & je veus sçavoir de combien le premier est plus grand que le second. Pour cela, j'observe que le Pied courant contenant 12 Pouces, la Racine du Pied cubique est 12 fois plus grande que celle du Pouce cubique. D'où je conclus que le Pied cubique est au Pouce cubique comme le Cube de 12 est au Cube de 1. Or le Cube de 12 est 1728; & le Cube de 1 est 1. Donc le Pied cubique est 1728 fois plus grand que le Pouce cubique.

Les Sphéres sont aussi des Figures semblables. Elles sont donc entre elles comme les Cubes de leurs Raïons ou de leurs Diamétres. Supposant donc que le Diamétre du Soleil est à celui de la Terre comme 100 est à 1 : quelqu'un qui parleroit sans réflexion, ou qui ne seroit pas Géométre, en concluroit tout d'un coup que le Soleil est 100 fois plus gros que la Terre. Mais ce seroit un furieux mécompte. Car le Cube de 100 est un million, & le Cube de 1 est 1. Donc

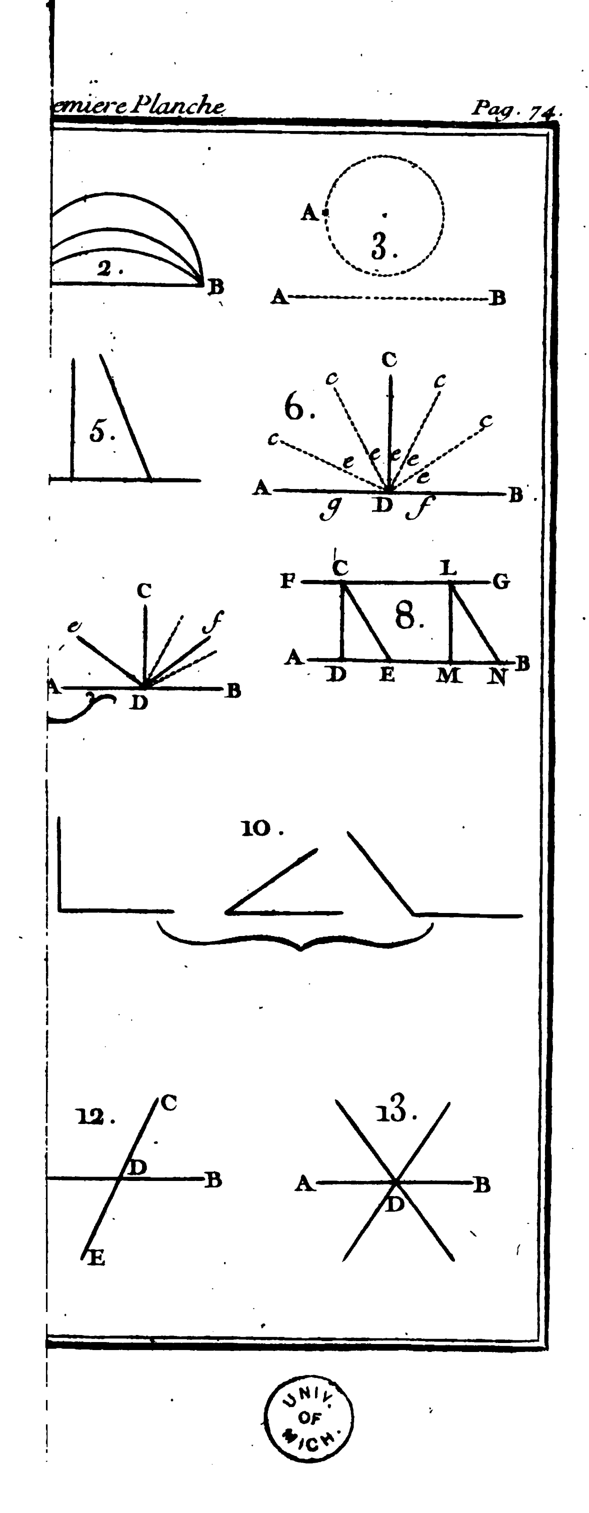
le Soleil est un million de fois plus gros que la Terre.

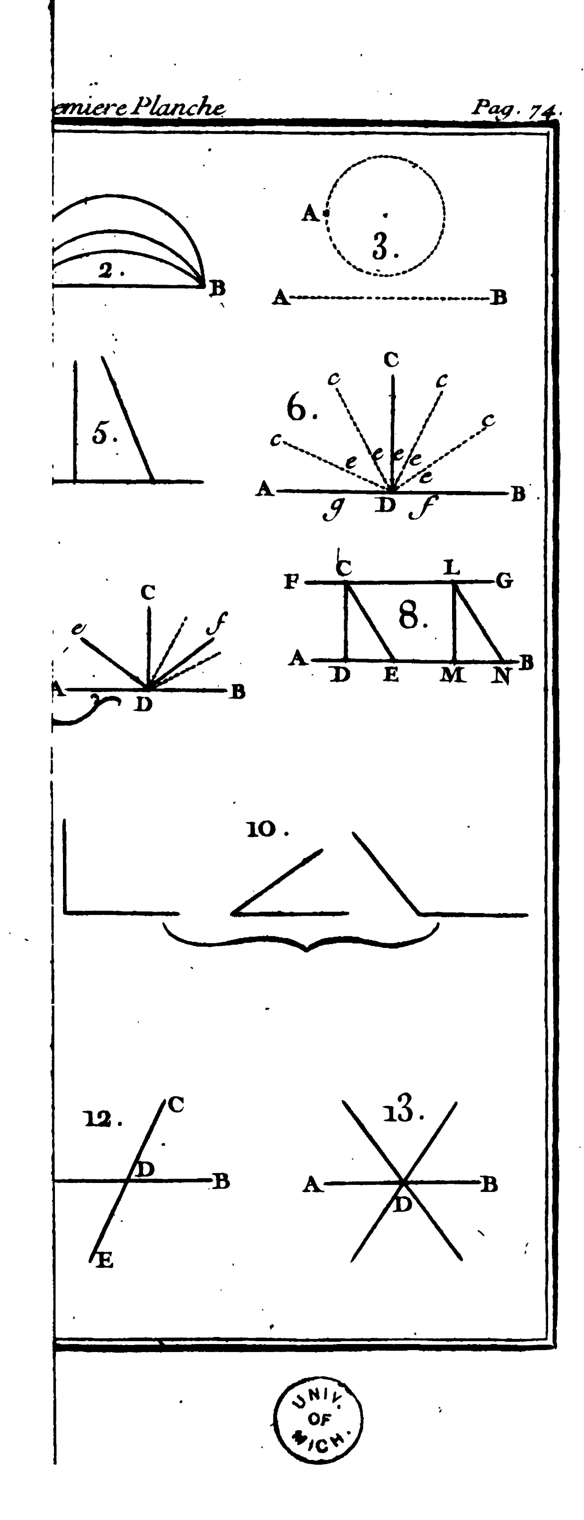
Remarquons encore que dans la comparaison de deux Sphéres il y a une prodigieuse différence entre le Rapport des Circonférences de leurs grands Cercles, celui de leurs Surfaces, & celui de leur Solidité. Car 1°. les Circonférences des grands Cercles sont comme les Diamétres. 2°. Les Surfaces, comme les Quarrés des Diamétres. 3°. Leur Solidité, comme les Cubes de ces mêmes Diamétres.

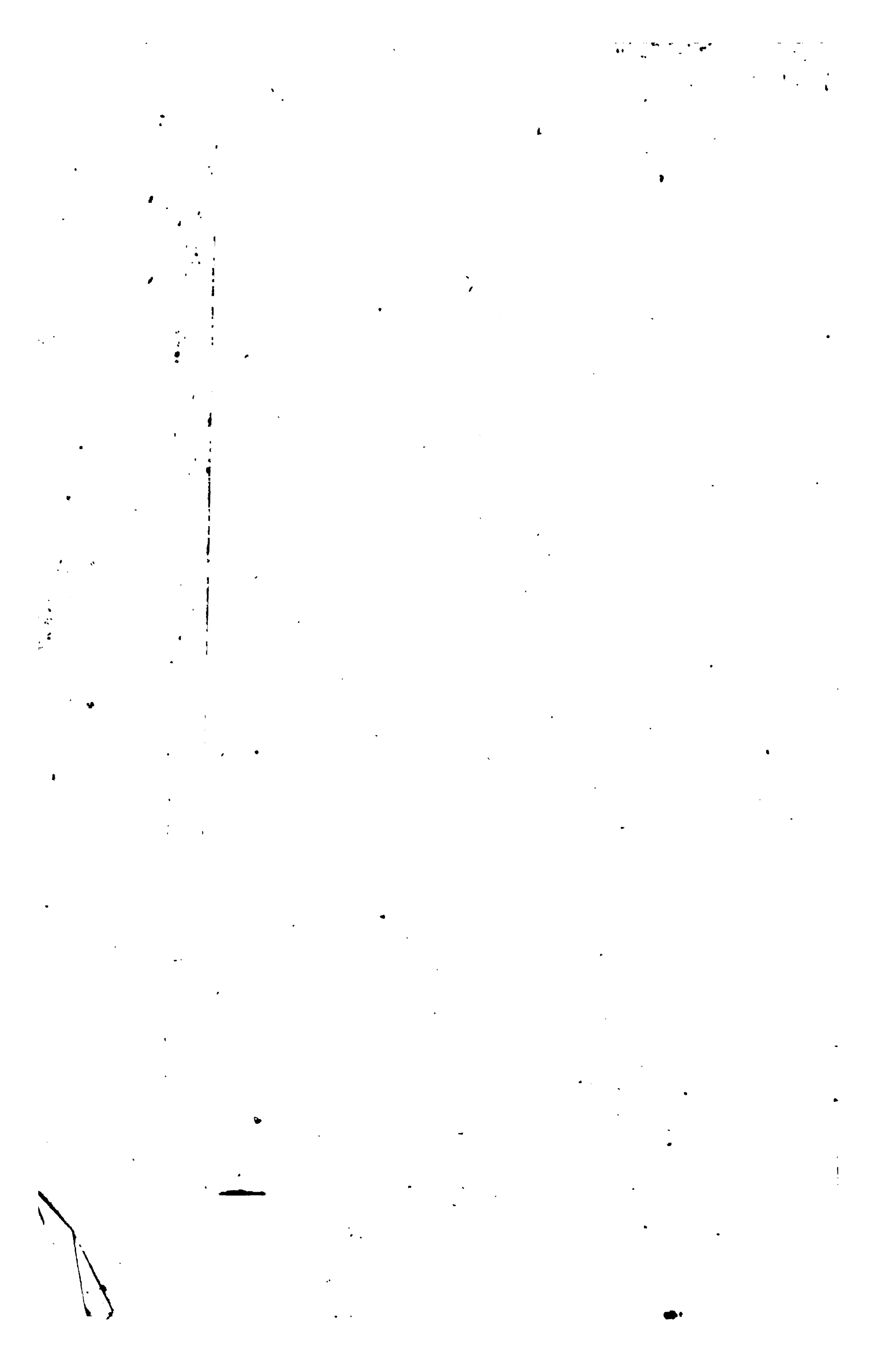
Pour juger sensiblement de cette différence, comparons le Diamétre 100 du Soleil au Diamétre 1 de la Terre, on verra que la Surface du Soleil est à celle de la Terre comme 10000 Quarré de 100, est à 1 Quarré de 1; & que la Solidité du Soleil est à celle de la Terre, comme un million, Cube de 100, est à 1 Cube de 1. La différence de ces deux Raisons est énorme comme l'on voit. Or tous les Solides semblables sont dans le même cas; puisque leur Surface étant comme les Quarrés de leurs Produisans homologues, leur Solidité est comme les Cubes de ces mêmes Produisans.

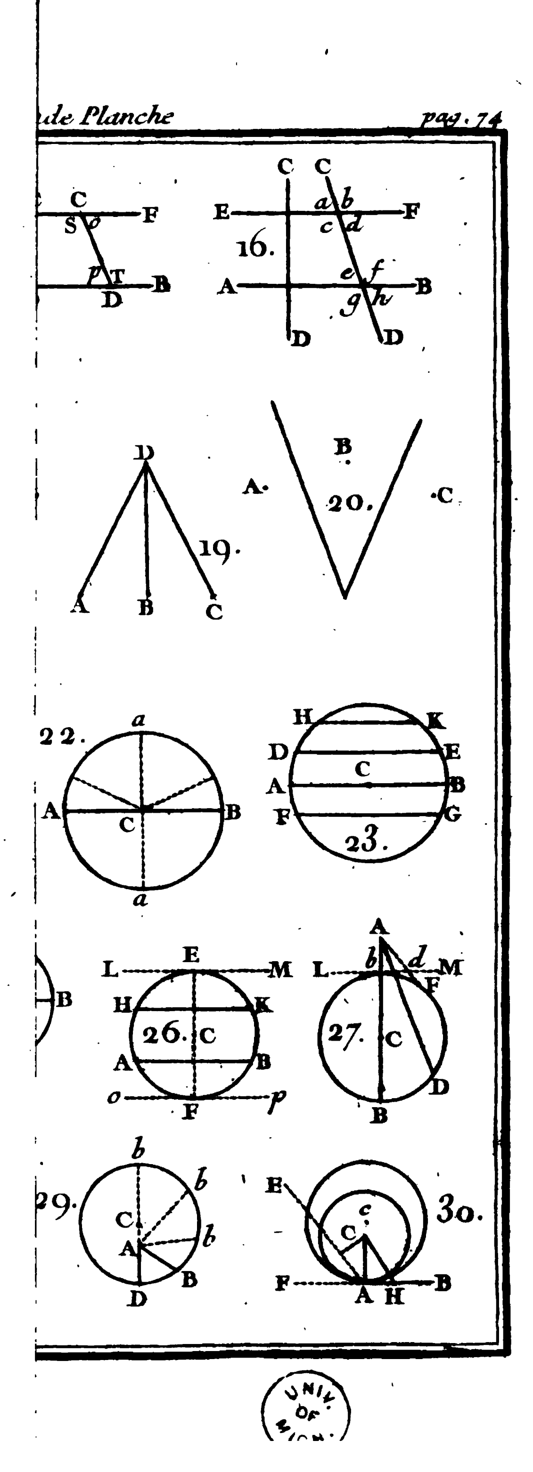
D'où il faut tirer cette conclusion très-importante : sçavoir, que *de deux Polyëdres semblables, le Gros, toute Proportion gardée, a beaucoup moins de Surface que le Petit.*

Fin du troisiéme & dernier Livre.


2.
B
A
3.
A
B
5.
C
c
c
6.
c
c
e
e
e
e
e
A
B
g
D
f
C
e
f
A
D
B
C
L
F
G
8.
A
D
E
M
N
B
10.
12.
C
D
B
E
13.
A
B
D


2.
B
A
3.
A
B
C
c
c
6.
c
5.
c
e e e e
e
A
B
g D f
C
e
f
A
D
B
C
L
F
G
8.
A
B
D E M N
10.
12.
C
D
B
E
13.
A
B
D





C F S o p T B D
C C E a b F c d 16. e f A B g h D D
D 19. A B C
B A. 20. C
22. a A B C a
H K D E C A B F G 23.
B
E L M H K 26. C A B o F p
A b d L M F 27. C D B
b b 29. C b A B D
E c 30. C F A H B

33

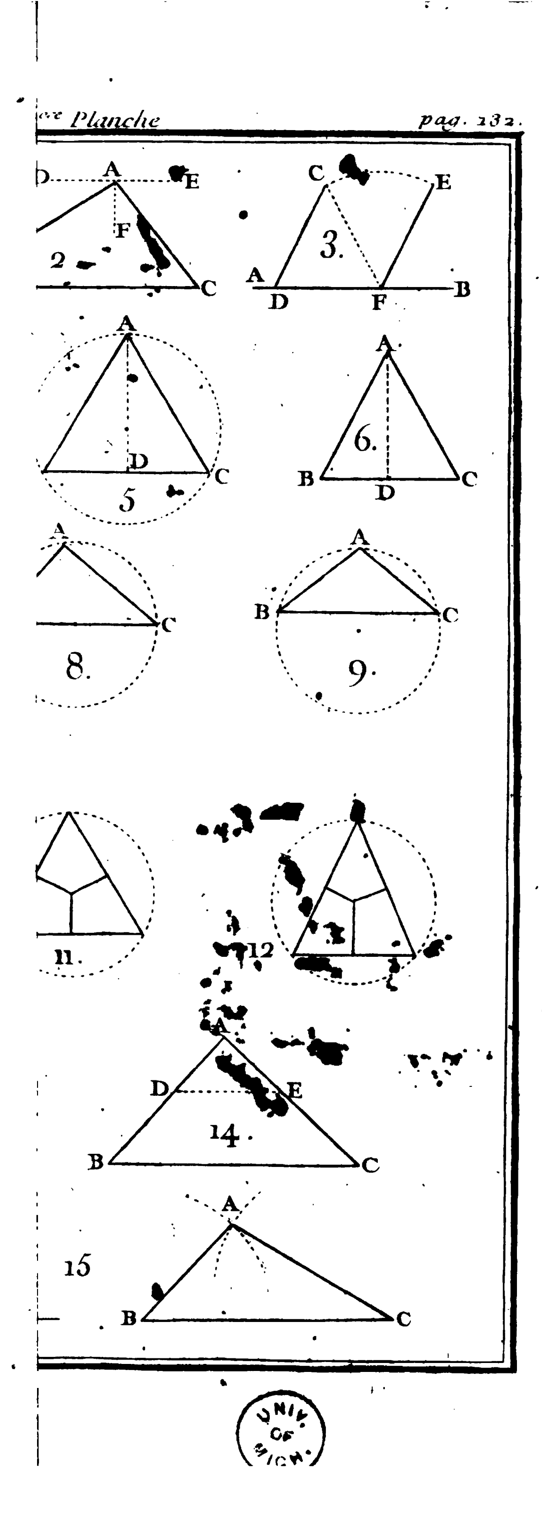
34

40

43.

45

46



D
A
E
F
2
C
C
E
3.
A
D
F
B
A
D
C
5
A
6.
B
D
C
A
C
8.
A
B
C
9.
11.
12
A
D
E
14.
B
C
A
15
B
C

N

M

18.

O

C

C

21.

22.

B

C

A B

25

D C

B

E

27.

C

A B

E

28.

D C

30.

31

B

C

33.

D

E F

34

z

B. 37. o o A C E D

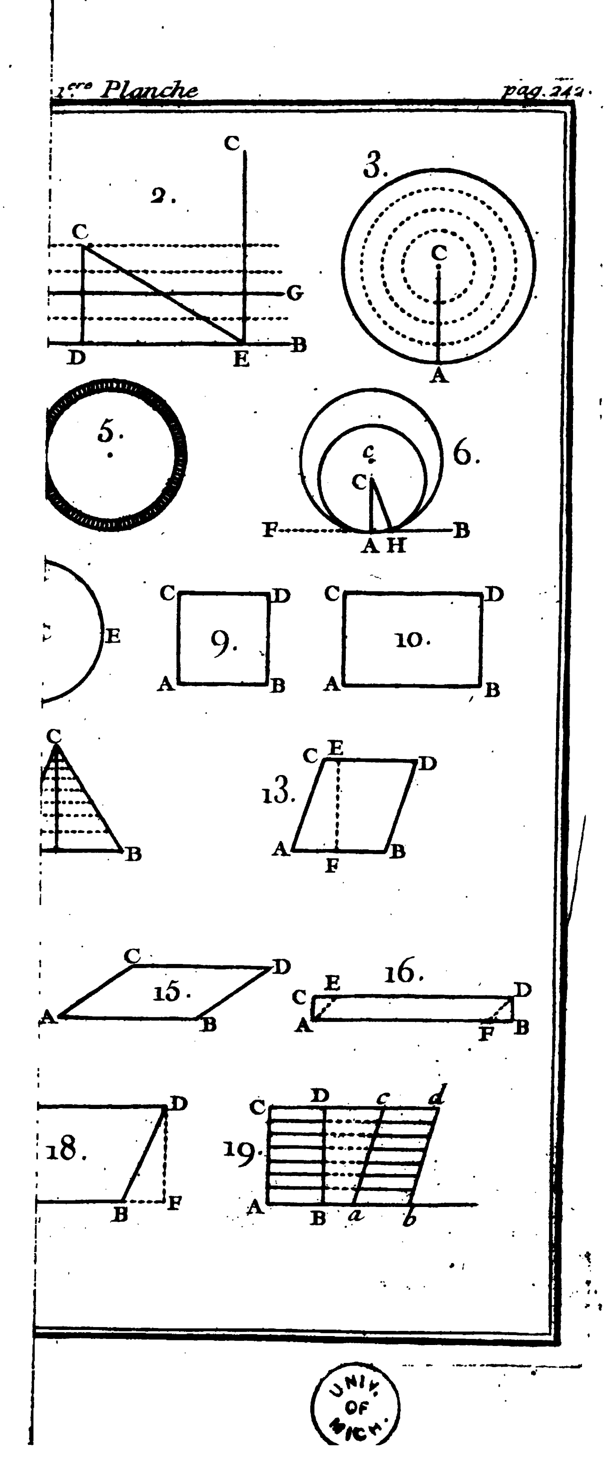
36.

40.

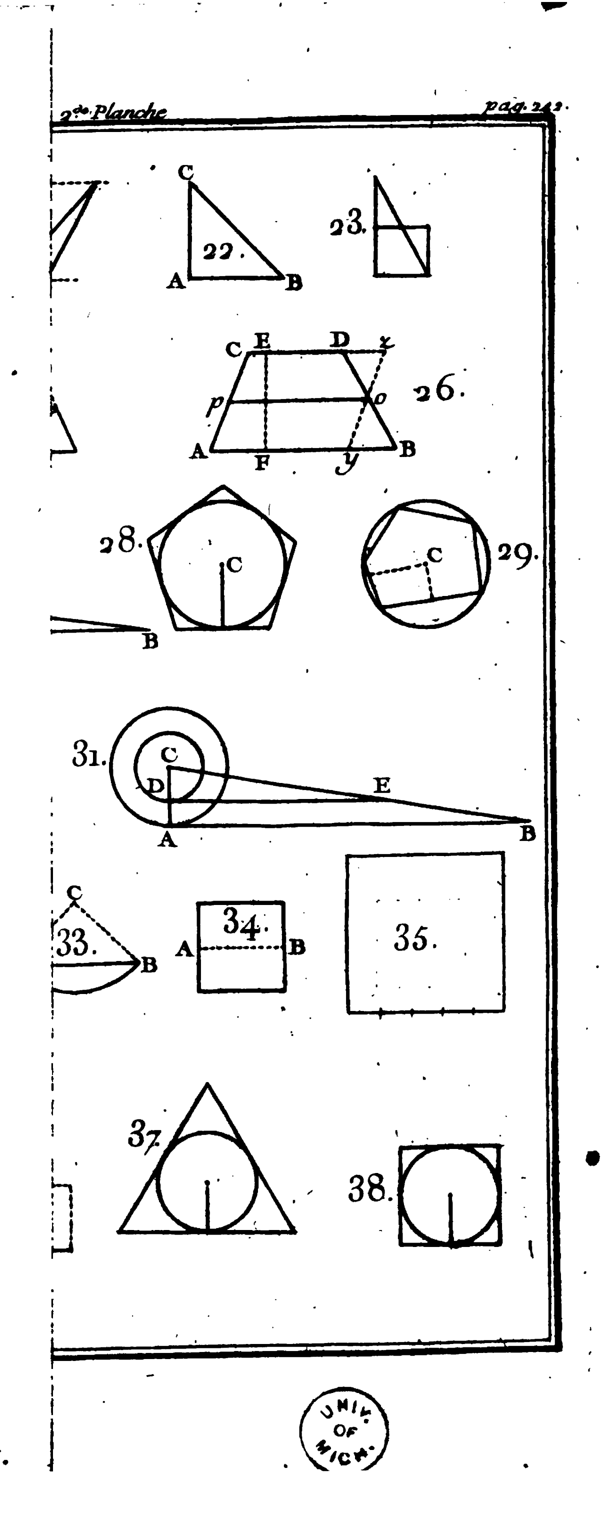
D E C A B 43.

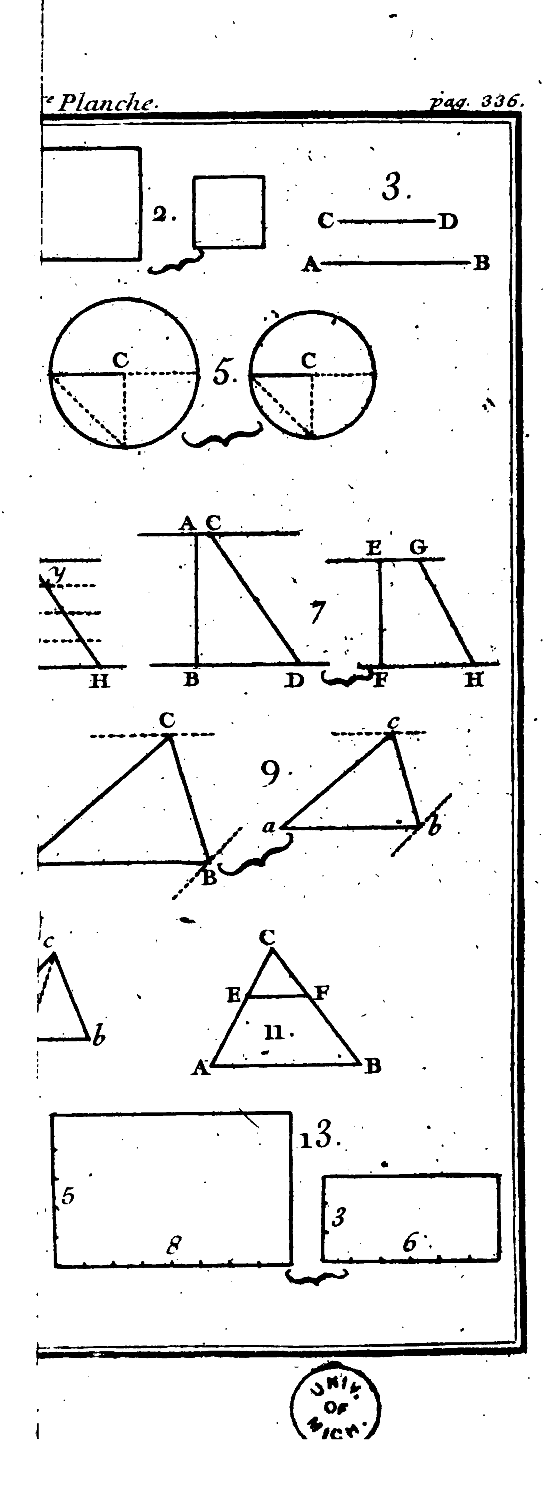
D B A 45.

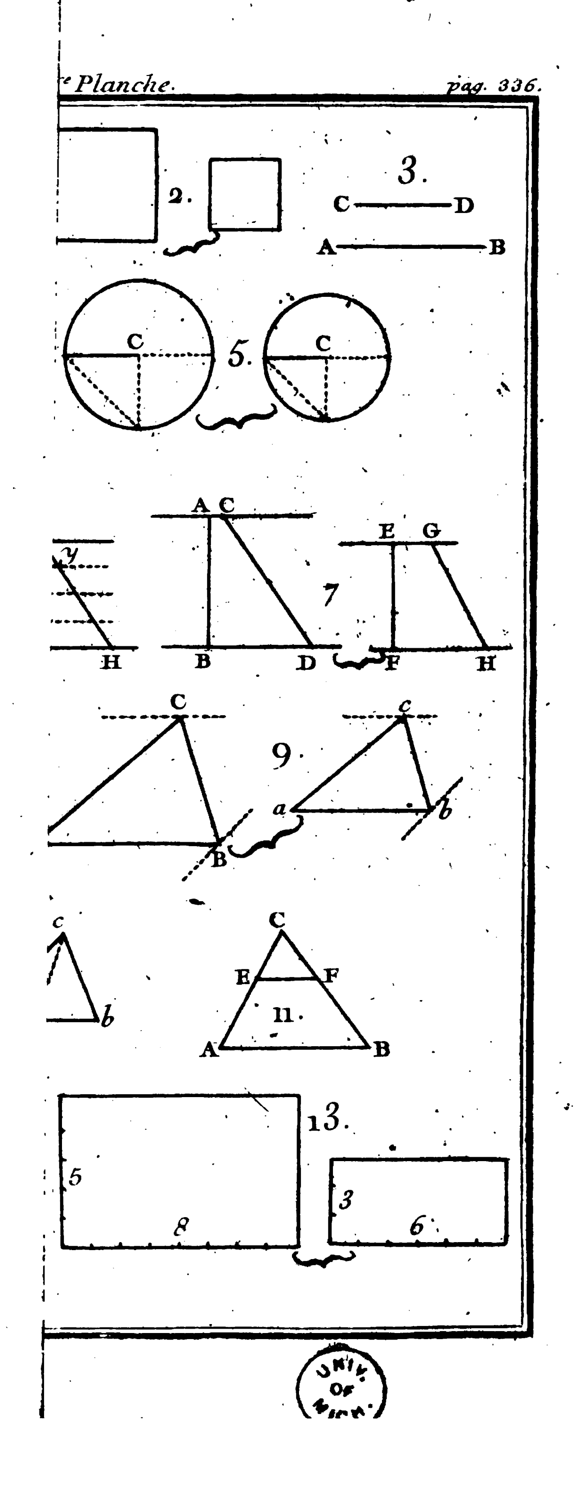
9.

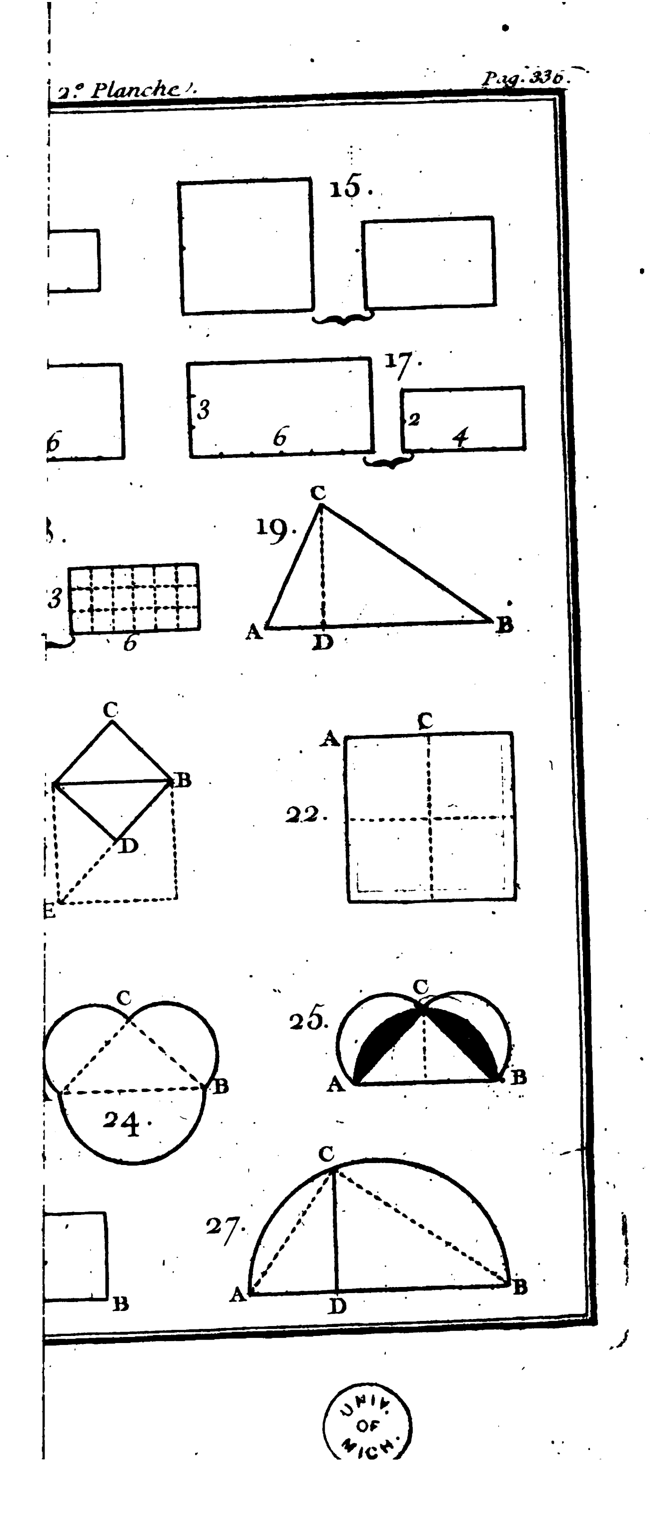


2.
C
C
G
D
E
B
3.
C
A
5.
6.
c
C
F
A H
B
E
C
D
9.
A
B
C
D
10.
A
B
C
B
C
E
D
13.
A
F
B
C
D
15.
A
B
16.
E
C
D
A
F
B
D
18.
B
F
C
D
c
d
19.
A
B
a
b


C
22.
A
B
23.
C E D z
p o
26.
A F y B
28.
C
29.
C
B
31.
C
D
E
A
B
C
33.
B
34.
A
B
35.
37.
38.


2.
3.
C
D
A
B
C
5.
C
A
C
y
E
G
7
H
B
D
F
H
C
c
9.
a
b
B
c
C
E
F
11.
b
A
B
13.
5
8
3
6


2.
3.
C D
A B
5.
C
C
A C
E G
y
7
H
B
D
F
H
C
c
9.
a
b
B
c
b
C
E
F
11.
A
B
13.
5
8
3
6


15.
17.
3
6
2
4
6
19.
C
A
D
B
3
6
C
B
D
E
A
C
22.
C
B
24.
25.
C
A
B
27.
C
A
D
B
B

F C E B

3. A K F H C B G E

A C B

6. A C B

B D

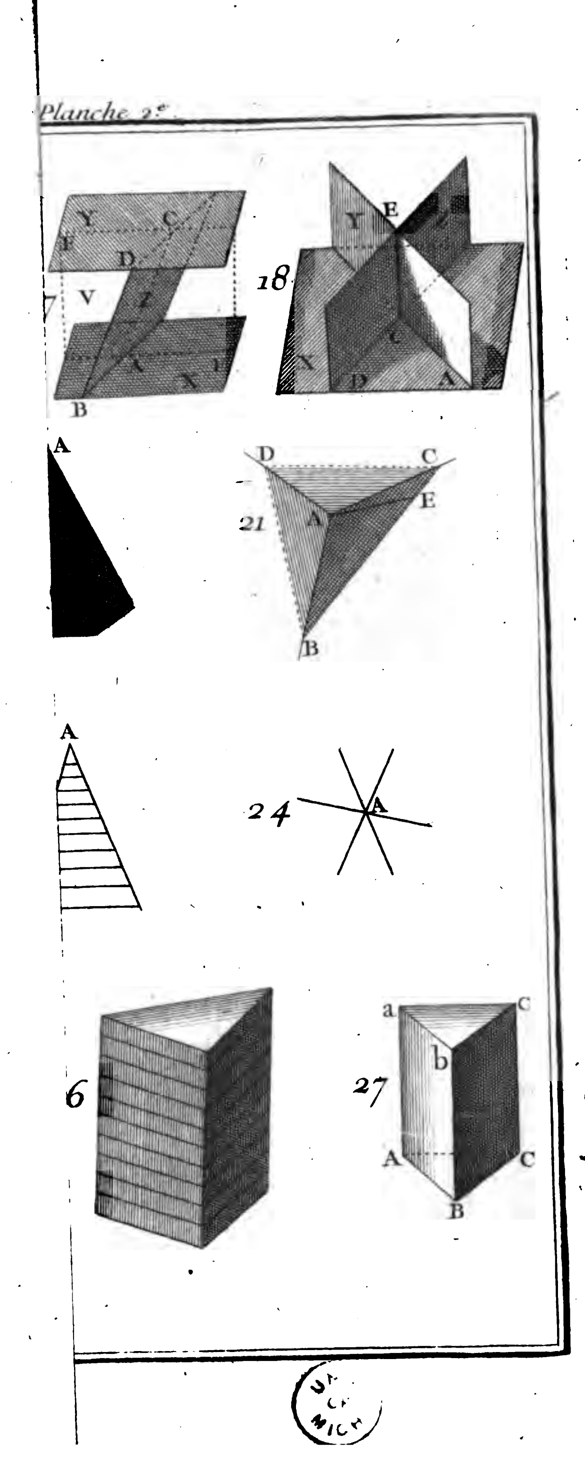
9. A F D C E B

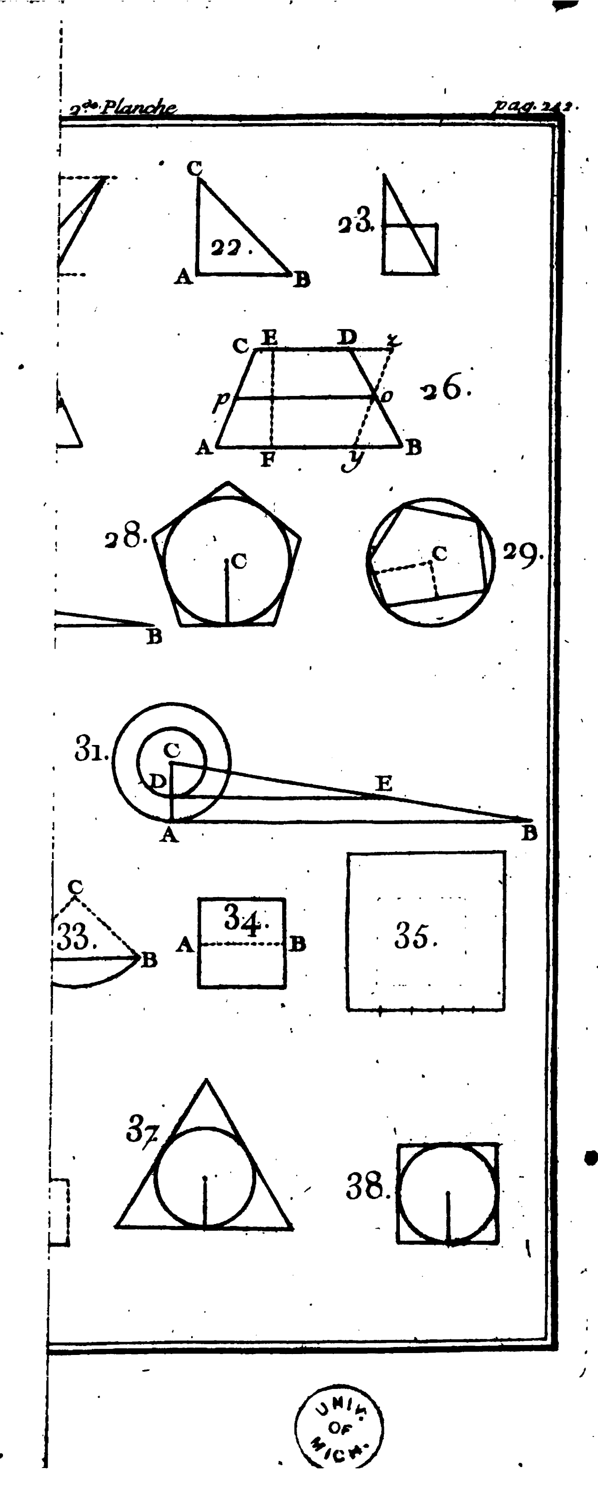
A B C Z V

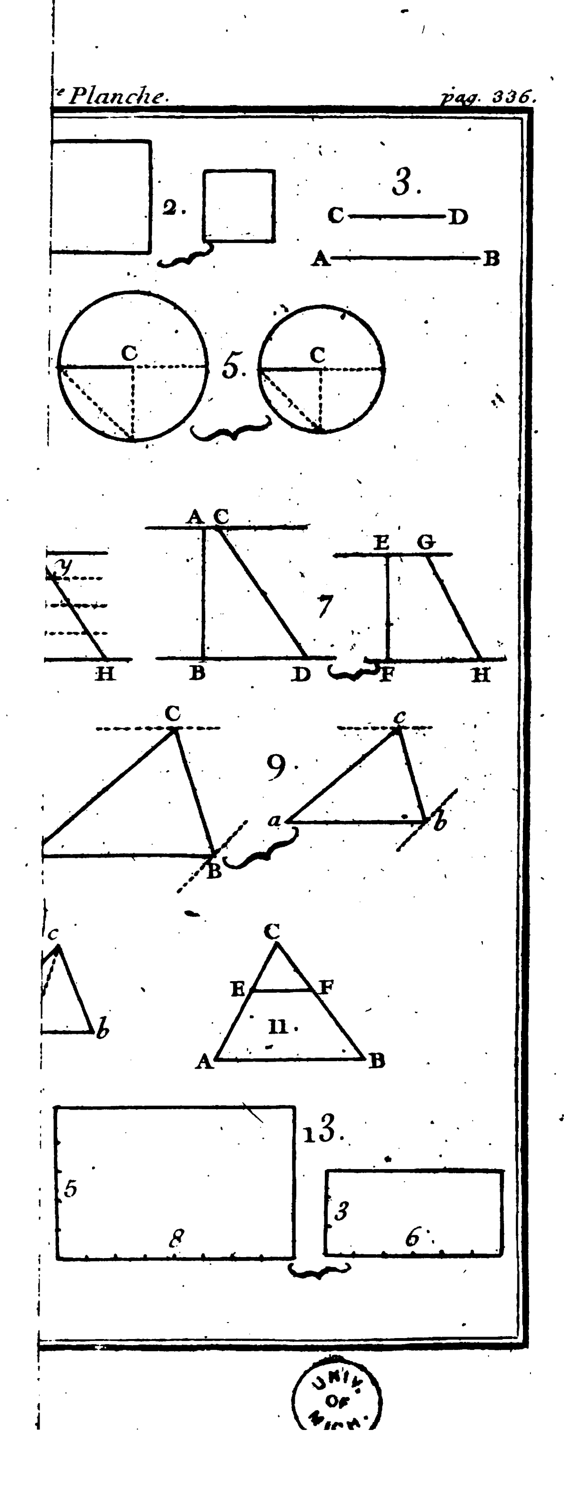
12. E A X C D B

14. D F

15. C A B


Planche 2.e
Y
C
F
D
V
Z
X
X
B
18
Y
E
X
D
A
A
D
C
E
21
A
B
A
A
24
A
6
a
C
b
27
A
C
B


2de Planche
pag.
C
22.
A
B
23.
C
E
D
z
p
o
26.
A
F
y
B
28.
C
C
29.
B
31.
C
D
E
A
B
C
33.
B
34.
A
B
35.
37
38.
UNIV. OF MICH.



2.
3.
C D
A B
C
5.
C
y
H
A C
B D
7
E G
F H
C
9.
c
a b
B
c
b
C
E F
11.
A B
13.
5
8
3
6

15.

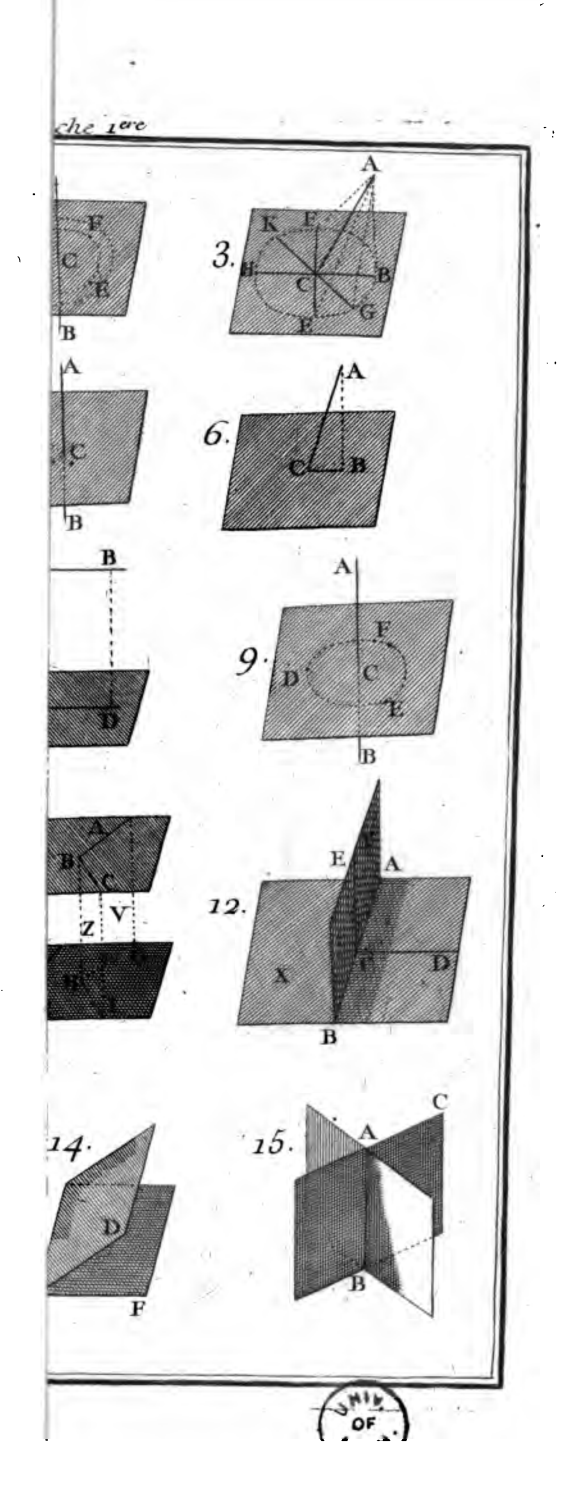
6 3 6 17. 2 4

3 6 19. C A D B

C B D E A C 22.

C B 24. 25. C A B

B 27. C A D B



3.
A
K
F
H
C
B
G
E
6.
A
C
B
9.
A
F
D
C
E
B
12.
E
A
X
D
B
14.
D
F
15.
C
A
B
Z
V

Planche 2.e

Y C F D V Z A X B

18 Y E Z X C D A

A

D C E A 21 B

A

24 A

6

a c b 27 A C B

Planche 3.e

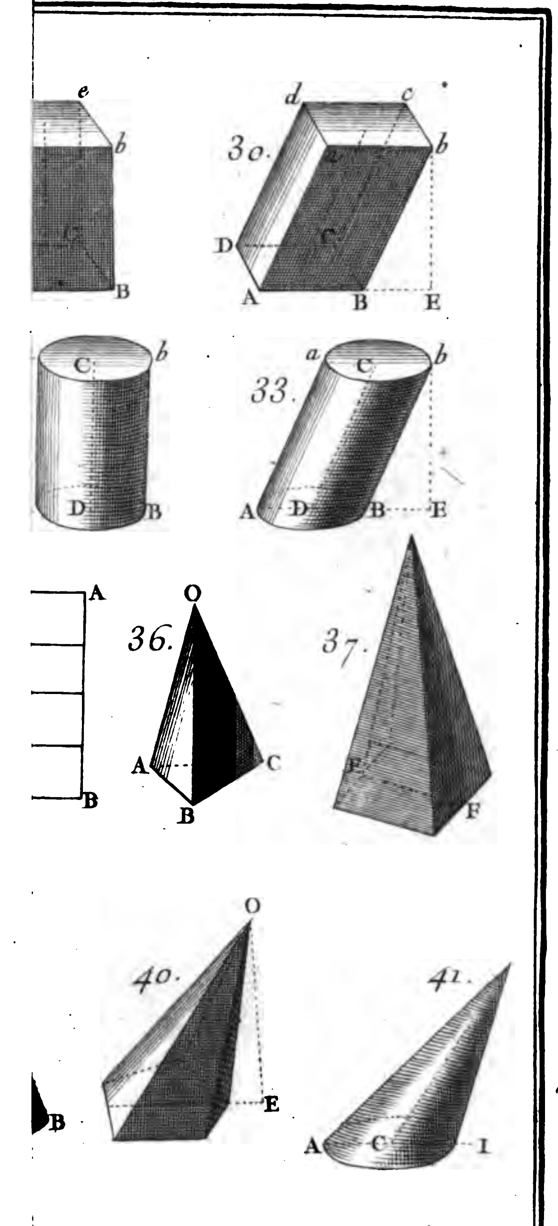
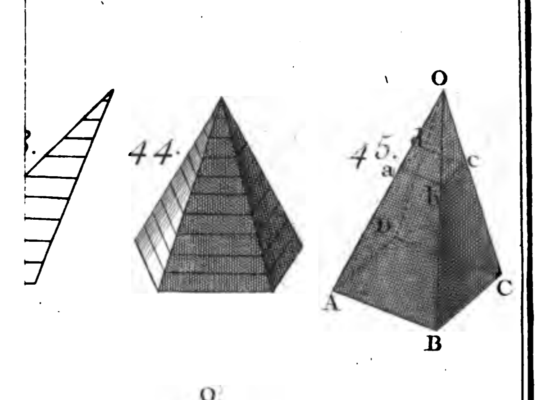
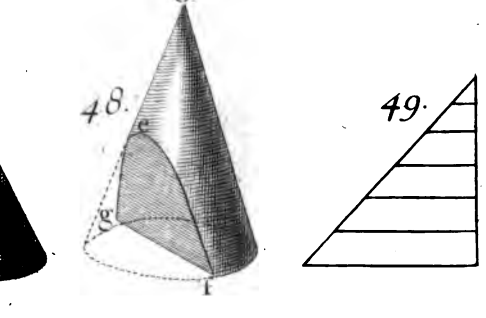

e
b
C
B
d
c
30.
a
b
D
C
A
B
E
C
b
D
B
a
C
b
33.
A
D
B
E
A
B
O
36.
A
C
B
37.
F
F
O
40.
E
B
41.
A
C
I

Planche 4.ᵉ





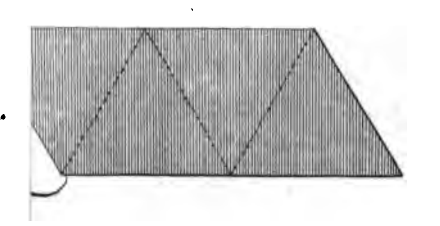


Planche 5e

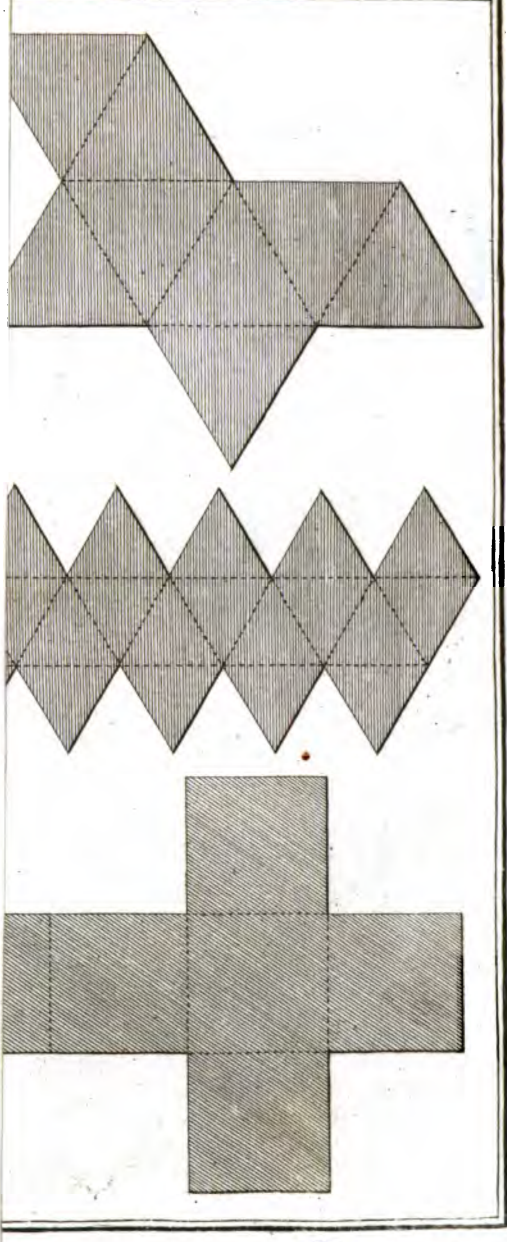
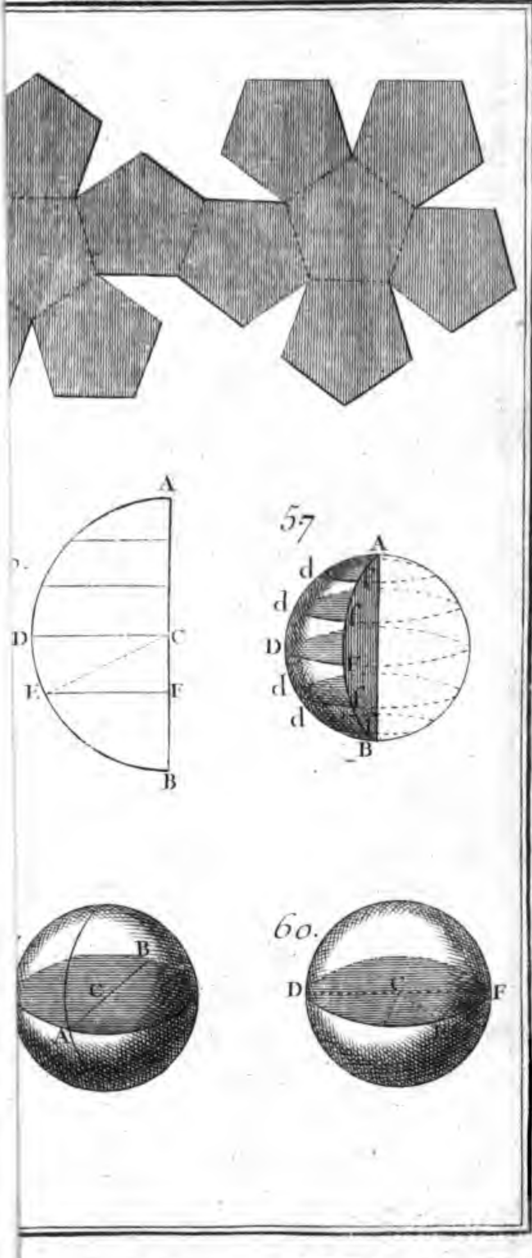


Planche 6e



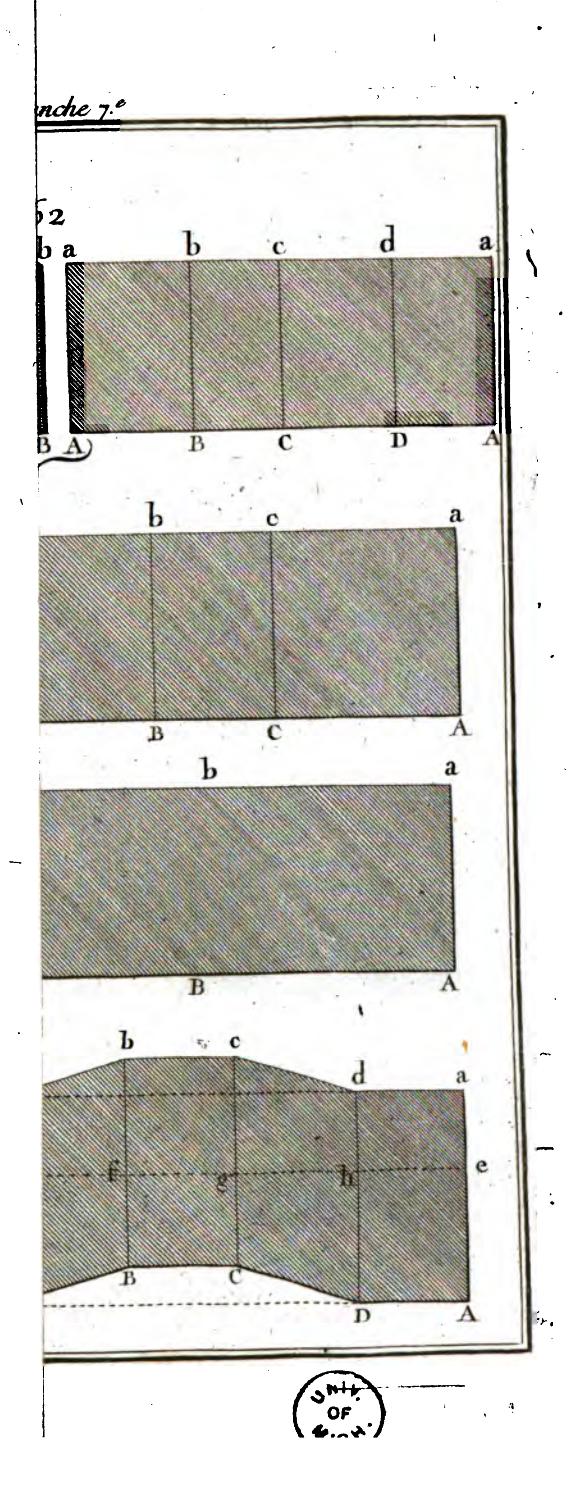

nche 7.e
52
b a b c d a
B A B C D A
b c a
B C A
b a
B A
b c d a
f g h e
B C D A

Planche 8.e

b

a

f

e

B

A

O

A

E

B

D

C

O

A

B

C

O

A

p

p

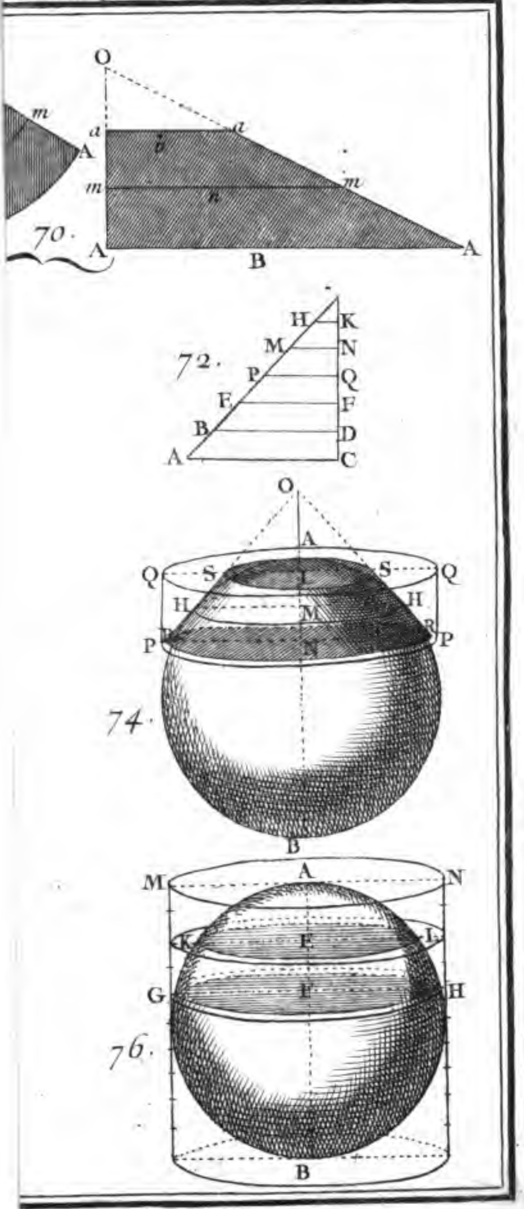
q

A

B

A

Planche 9e



O
m
a
a
b
A
m
m
n
70.
A
B
A
H
K
M
N
72.
P
Q
E
F
B
D
A
C
O
A
Q
S
I
S
Q
H
H
M
P
R
N
R
P
74.
B
M
A
N
K
E
L
G
F
H
76.
B

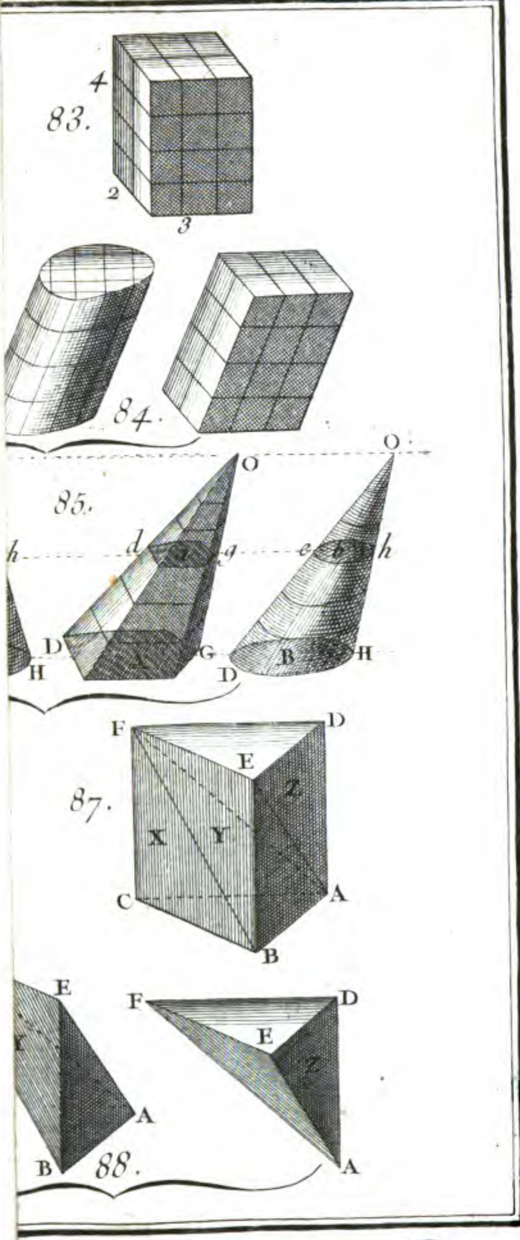
Planche 10.e

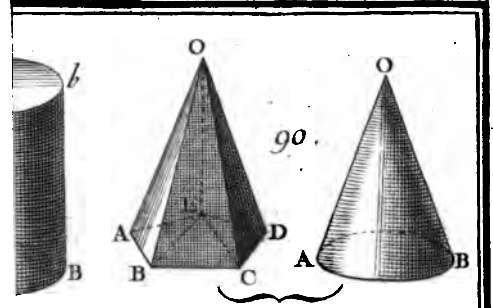
a
D
E
b
d

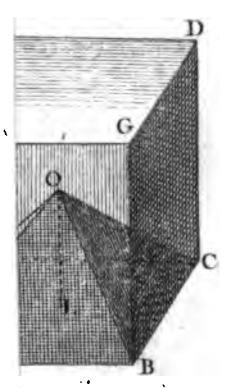
C E D
80.
A F B

Y C A C B
X D X D X
81.

Planche 11.e




b
B
O
90.
A
D
B
C
O
A
B


D
G
O
C
B

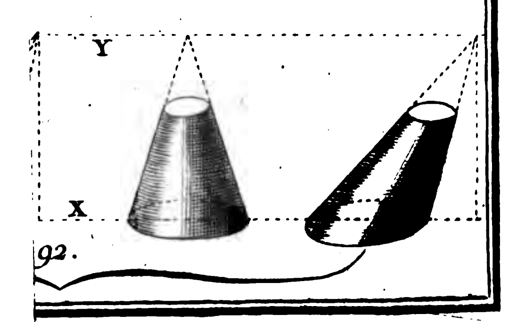

Y
X
92.

Planche 13e.

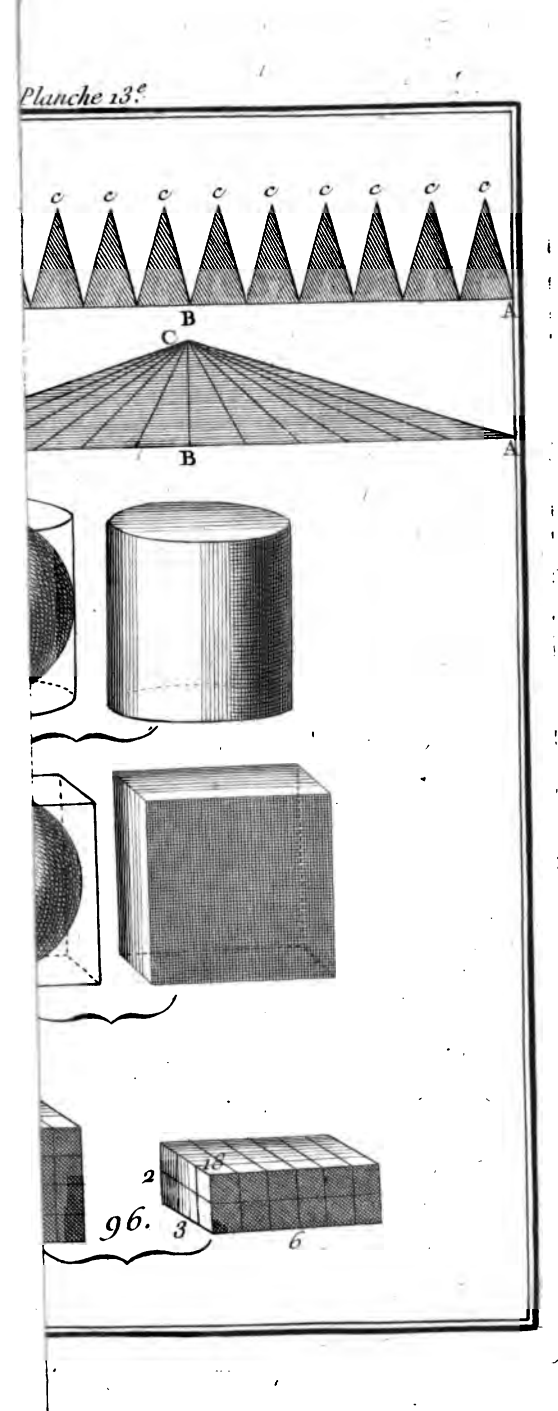


Planche 14e

